

Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

Tema 9: Trifásica

Contenidos

- Alternador trifásico
- Carga trifásica
- Línea trifásica
- Sistemas trifásicos equilibrados
- Circuitos monofásicos equivalentes

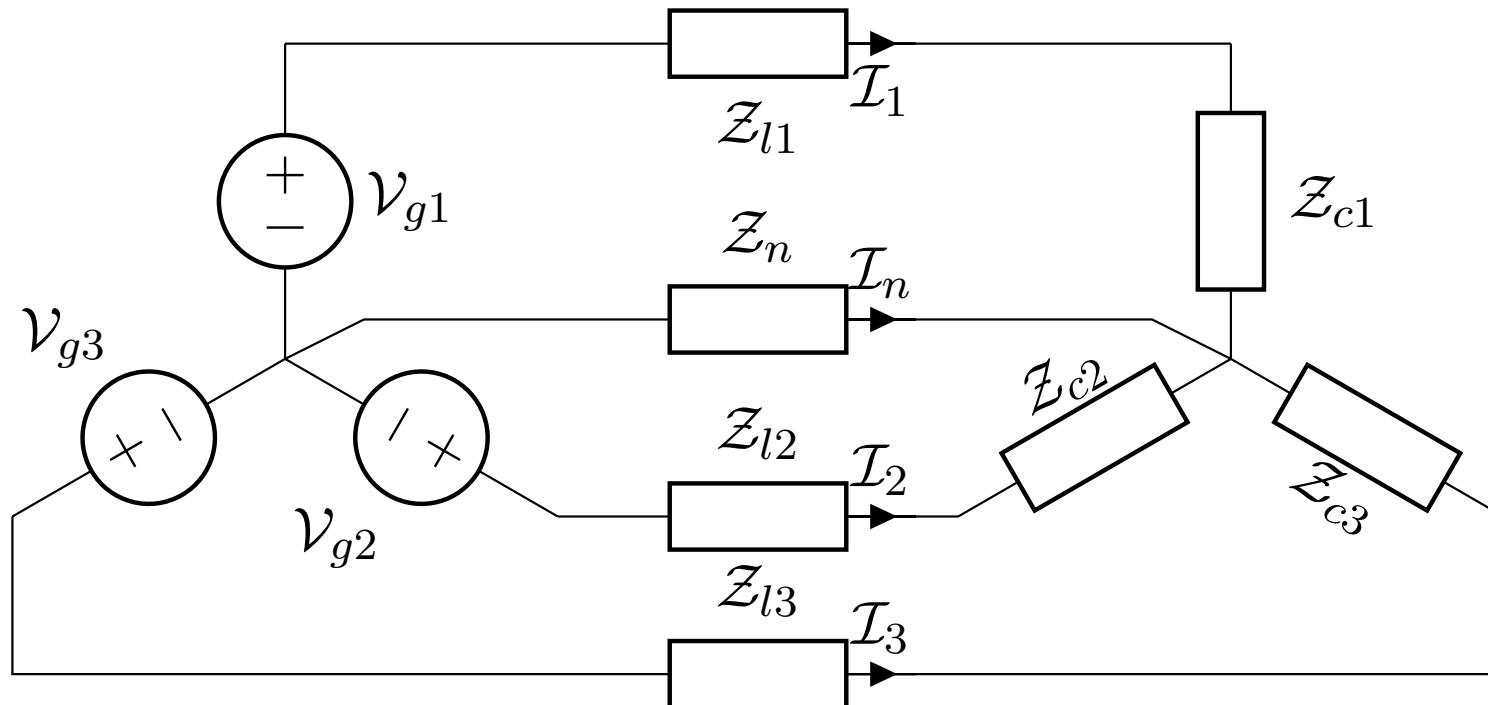
Ejercicio 9-1

Resuelve el circuito usando el método de mallas y calcula

a) I_1 [A] c) I_2 [A] e) I_3 [A] g) I_n [A]

b) ϕ_1 [°] d) ϕ_2 [°] f) ϕ_3 [°] h) ϕ_n [°]

donde $\mathcal{I}_1 = I_1 / \phi_1^\circ$ $\mathcal{I}_2 = I_2 / \phi_2^\circ$ $\mathcal{I}_3 = I_3 / \phi_3^\circ$ $\mathcal{I}_n = I_n / \phi_n^\circ$



Datos: $\mathcal{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \alpha / 0^\circ$ [V], $\mathcal{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \alpha / 120^\circ$ [V], $\mathcal{V}_{g3} = 200 + 10 \cdot \alpha / 240^\circ$ [V], $\mathcal{Z}_{l1} = \mathcal{Z}_{l2} = \mathcal{Z}_{l3} = \beta + j\gamma$ [Ω], $\mathcal{Z}_{c1} = \mathcal{Z}_{c2} = \mathcal{Z}_{c3} = \delta + j\epsilon$ [Ω], $\mathcal{Z}_n = \eta + j\theta$ [Ω]

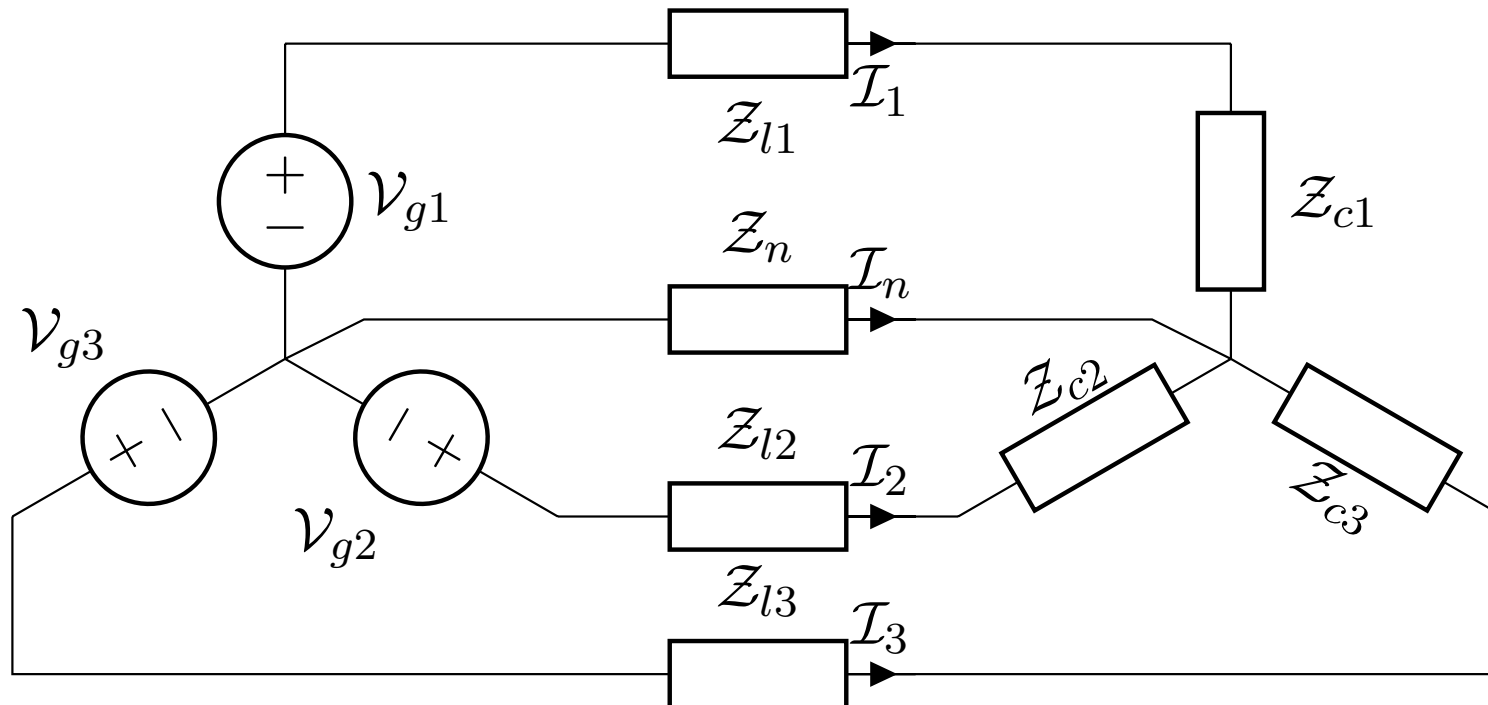
Ejercicio 9-2

Resuelve el circuito usando el método de mallas y calcula

a) I_1 [A] c) I_2 [A] e) I_3 [A] g) I_n [A]

b) ϕ_1 [°] d) ϕ_2 [°] f) ϕ_3 [°] h) ϕ_n [°]

donde $\mathcal{I}_1 = I_1 / \underline{\phi_1^\circ}$ $\mathcal{I}_2 = I_2 / \underline{\phi_2^\circ}$ $\mathcal{I}_3 = I_3 / \underline{\phi_3^\circ}$ $\mathcal{I}_n = I_n / \underline{\phi_n^\circ}$



Datos: $\mathcal{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \alpha / \underline{0^\circ}$ [V], $\mathcal{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \alpha / \underline{120^\circ}$ [V], $\mathcal{V}_{g3} = 200 + 10 \cdot \alpha / \underline{240^\circ}$ [V], $\mathcal{Z}_{l1} = \mathcal{Z}_{l2} = \mathcal{Z}_{l3} = \beta + j\gamma$ [Ω], $\mathcal{Z}_{c1} = \delta + j\epsilon$ [Ω], $\mathcal{Z}_{c2} = \kappa + j\lambda$ [Ω], $\mathcal{Z}_{c3} = \alpha + j\beta$ [Ω], $\mathcal{Z}_n = \eta + j\theta$ [Ω]

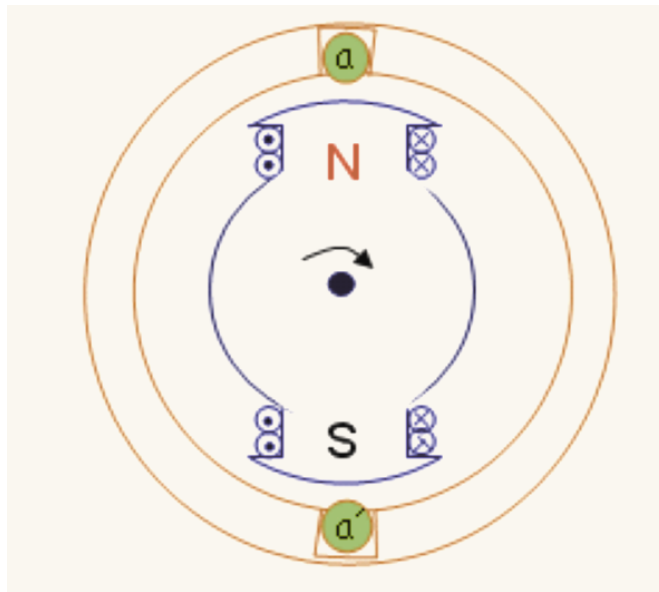
Ejercicio 9-1 y 9-2

Compara los resultados de los ejercicios 9-1 y 9-2. ¿Qué conclusiones se derivan de los resultados?

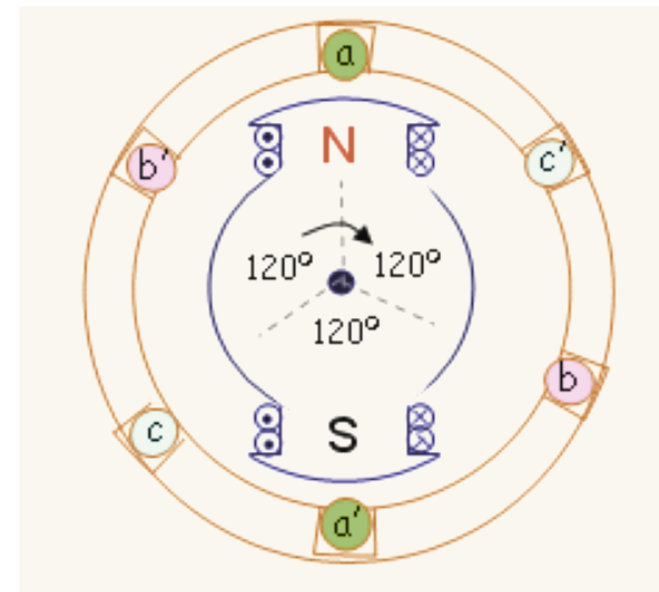
	Ejercicio 9-1	Ejercicio 9-2
I_1 [A]		
ϕ_1 [°]		
I_2 [A]		
ϕ_2 [°]		
I_3 [A]		
ϕ_3 [°]		
I_n [A]		
ϕ_n [°]		

Alternador trifásico

Alternador monofásico

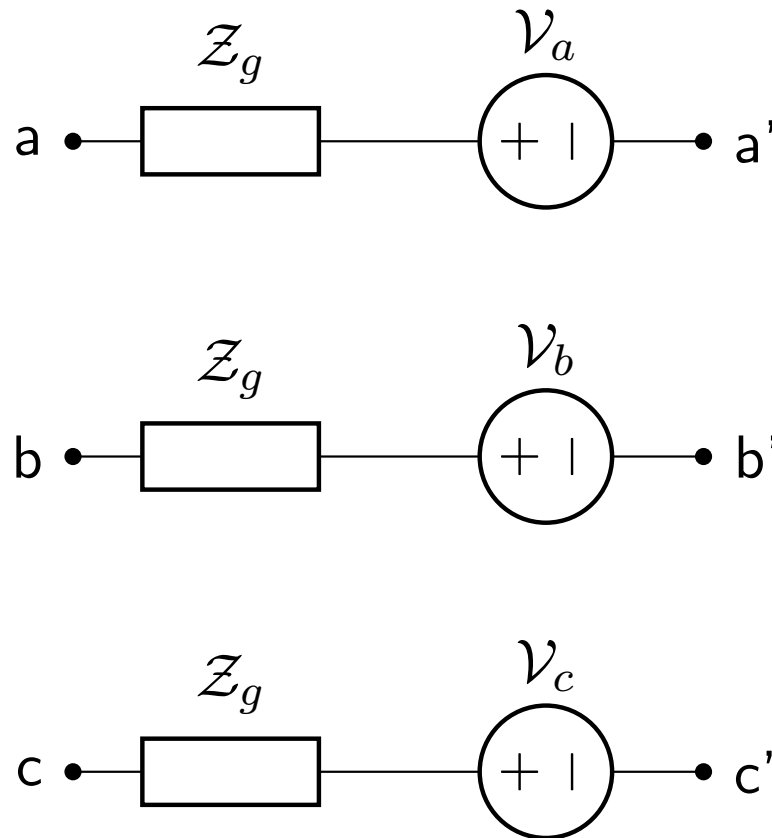


Alternador trifásico



Alternador trifásico

Un alternador trifásico está formado por tres fuentes de tensión sinusoidales de misma amplitud y frecuencia y desfasados 120°

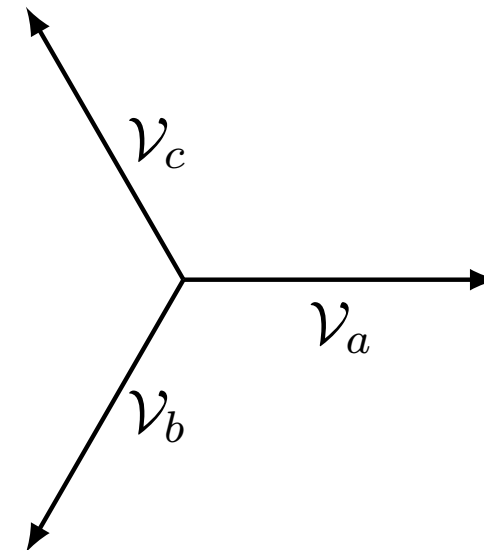


$$V_a = V \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$V_b = V \angle -120^\circ \text{ [V]}$$

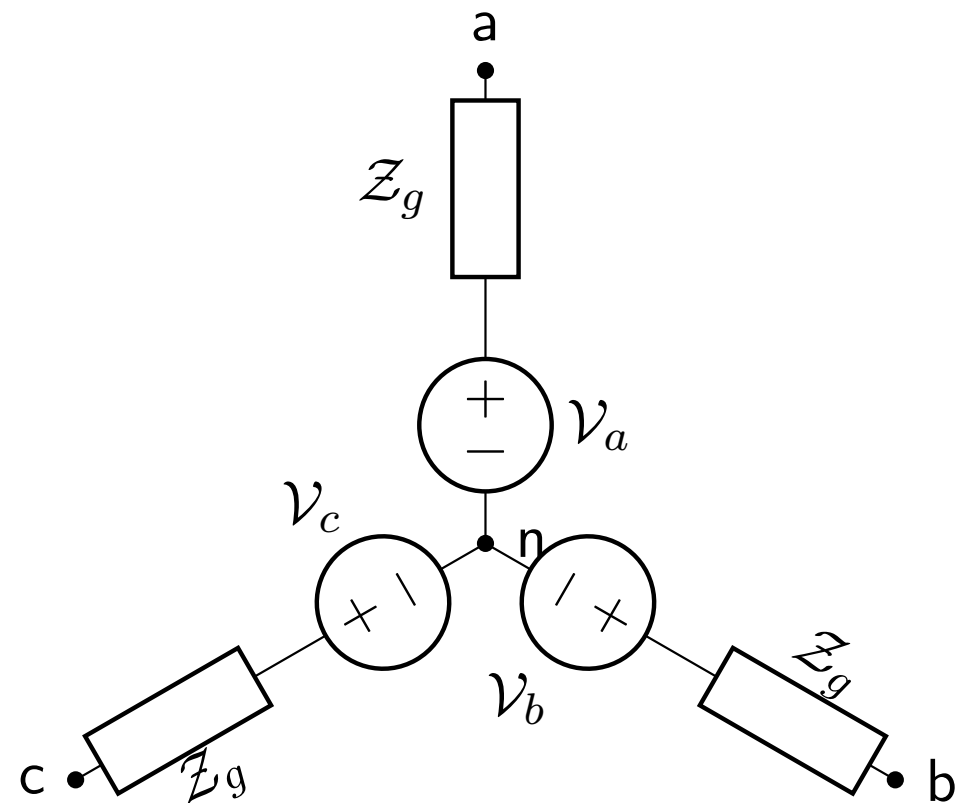
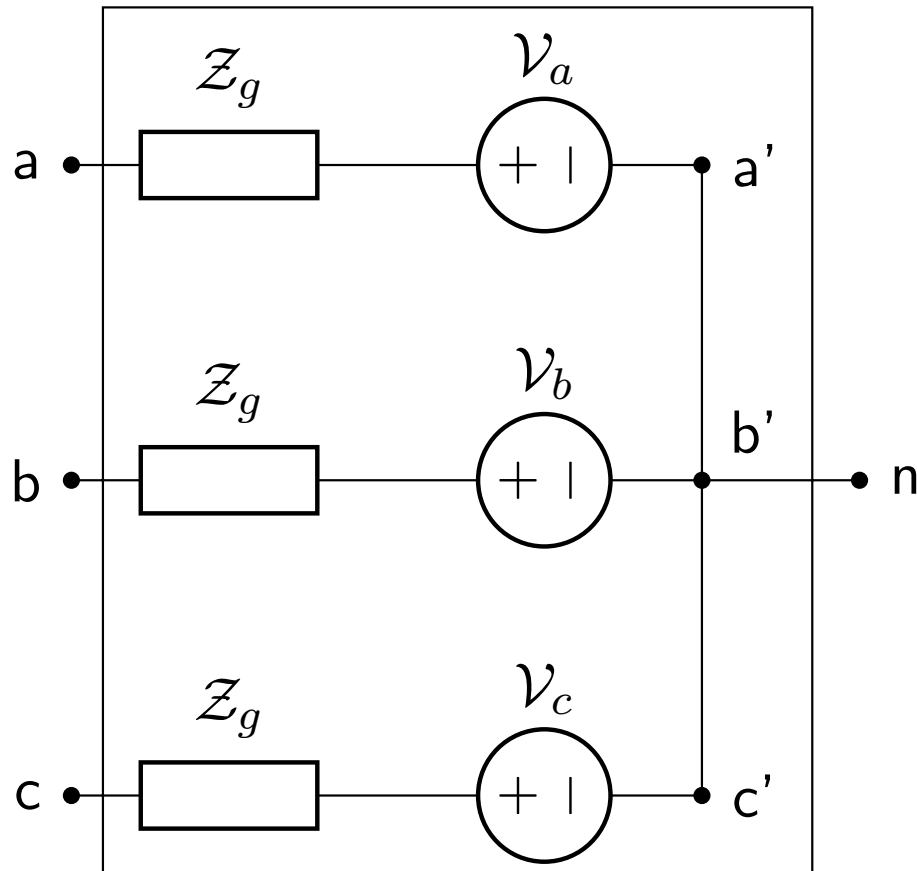
$$V_c = V \angle +120^\circ \text{ [V]}$$

$$V_a + V_b + V_c = 0$$



Alternador trifásico

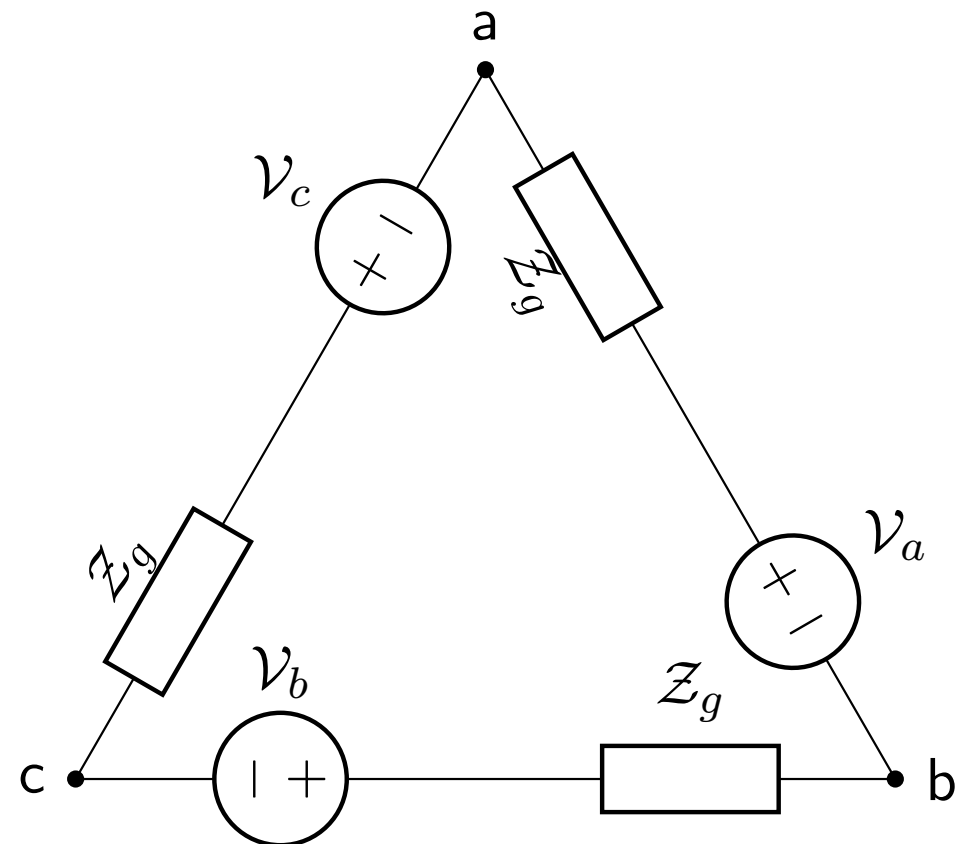
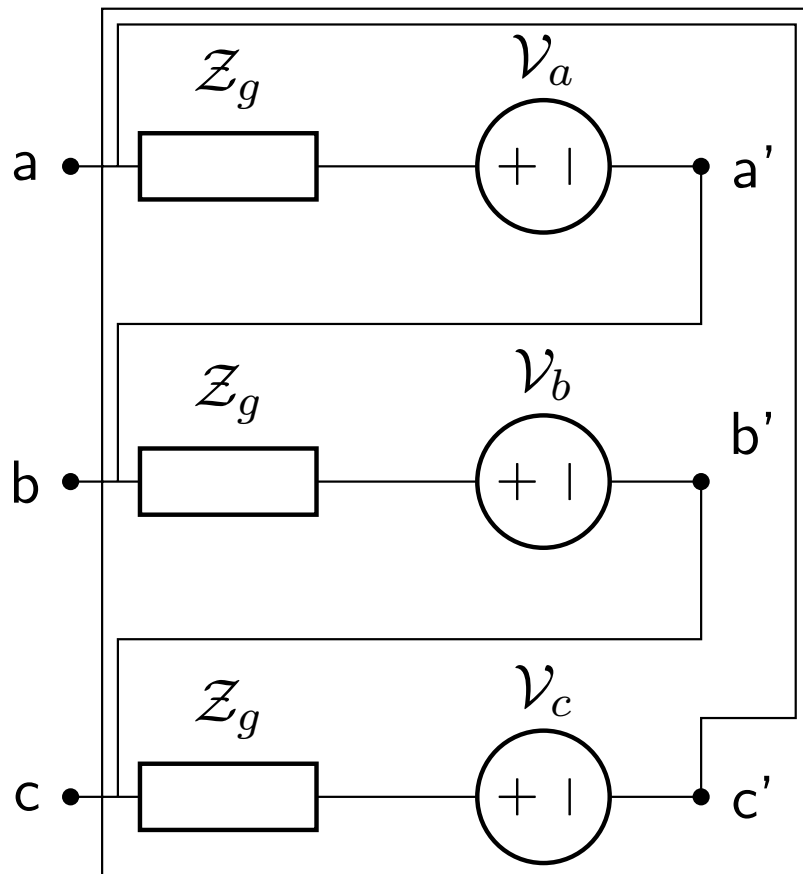
Conexión en estrella de un alternador trifásico equilibrado y real



$\mathcal{V}_{an}, \mathcal{V}_{bn}, \mathcal{V}_{cn} \rightarrow$ Tensiones de fase

Alternador trifásico

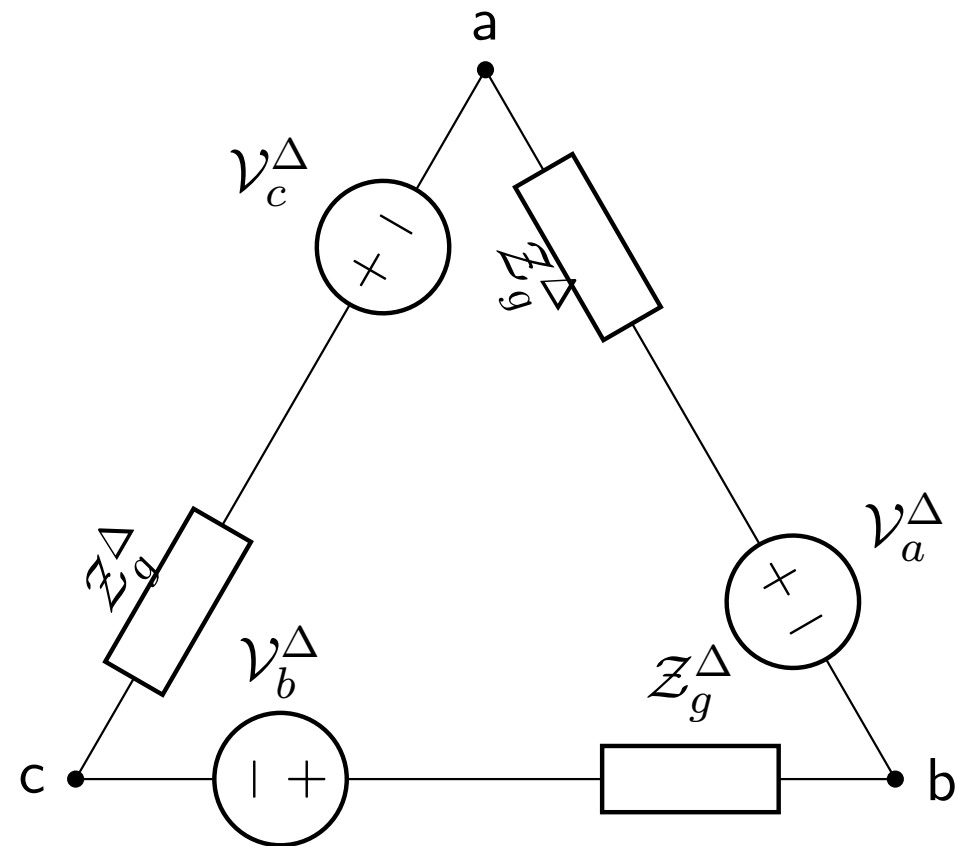
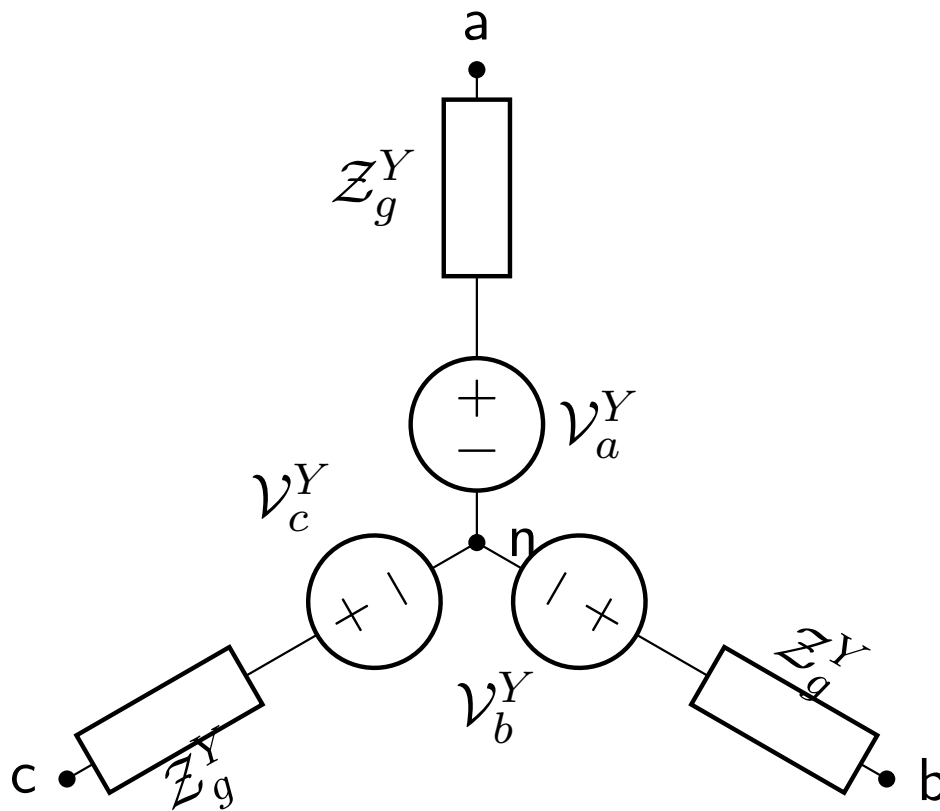
Conexión en triángulo de un alternador trifásico equilibrado y real



$V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} \rightarrow$ Tensiones de fase

Alternador trifásico

Conversión estrella-triángulo de un alternador trifásico equilibrado y real



$$Z_g^\Delta = 3Z_g^Y$$

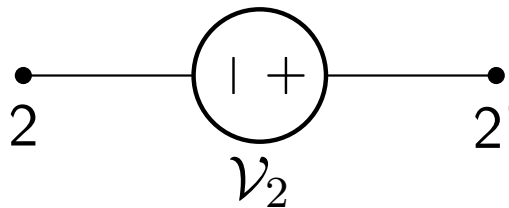
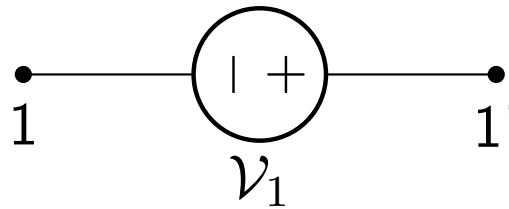
$$v_a^\Delta = \sqrt{3}/30^\circ \cdot v_a^Y$$

$$v_b^\Delta = \sqrt{3}/30^\circ \cdot v_b^Y$$

$$v_c^\Delta = \sqrt{3}/30^\circ \cdot v_c^Y$$

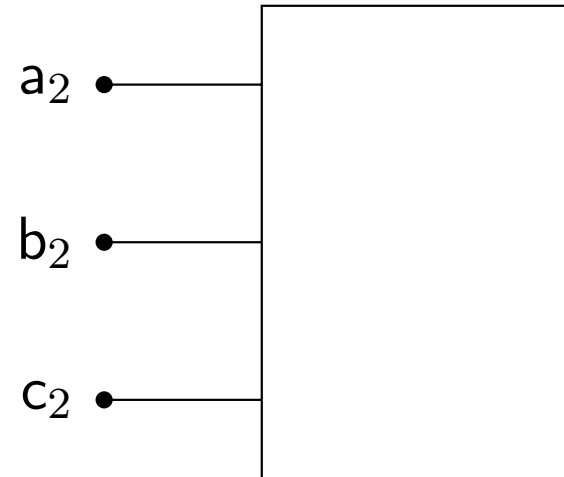
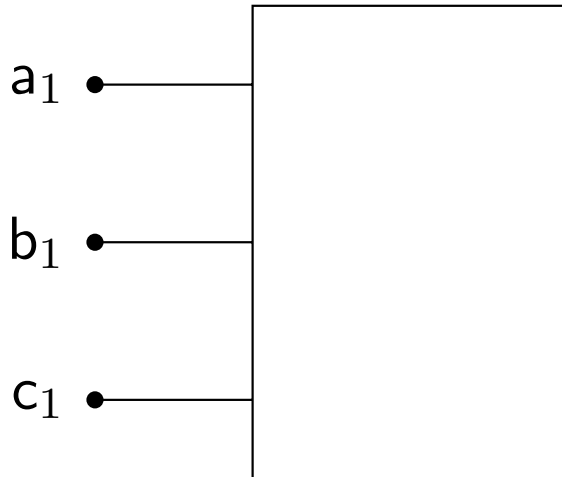
Alternador trifásico

Tenemos dos alternadores monofásicos idénticos con la misma tensión eficaz y girando a la misma velocidad y en fase. ¿Cómo conectarías dichos alternadores en paralelo si los alternadores están girando en el mismo sentido? ¿Y si giran en sentido contrario?



Alternador trifásico

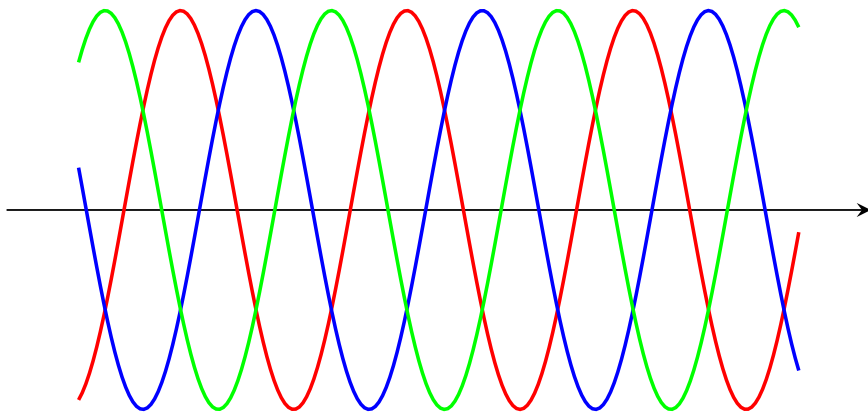
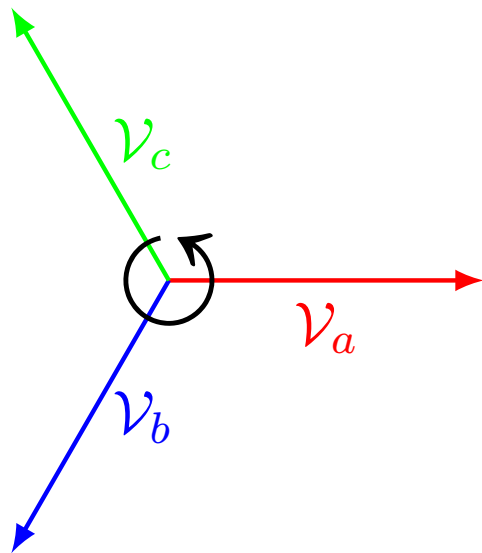
Tenemos dos alternadores trifásicos idénticos con la misma tensión eficaz y girando a la misma velocidad y en fase. ¿Cómo conectarías dichos alternadores en paralelo si los alternadores están girando en el mismo sentido? ¿Y si giran en sentido contrario?



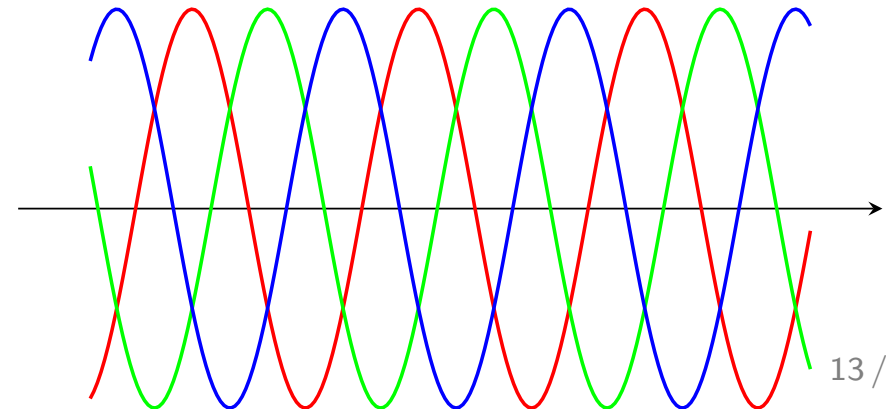
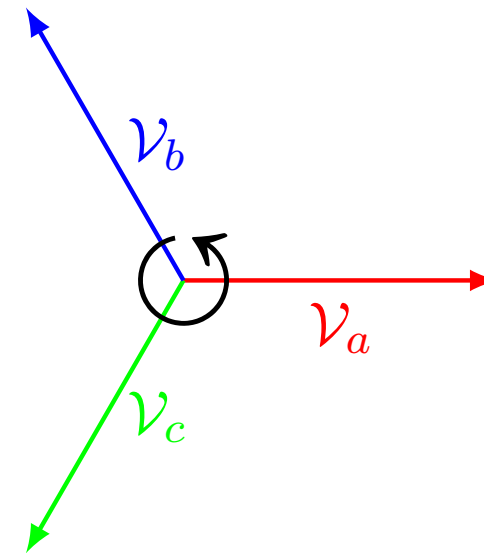
Alternador trifásico

La secuencia de fase establece el orden en el que se suceden los fasores de tensión (a-b-c, 1-2-3, R-S-T)

Secuencia directa

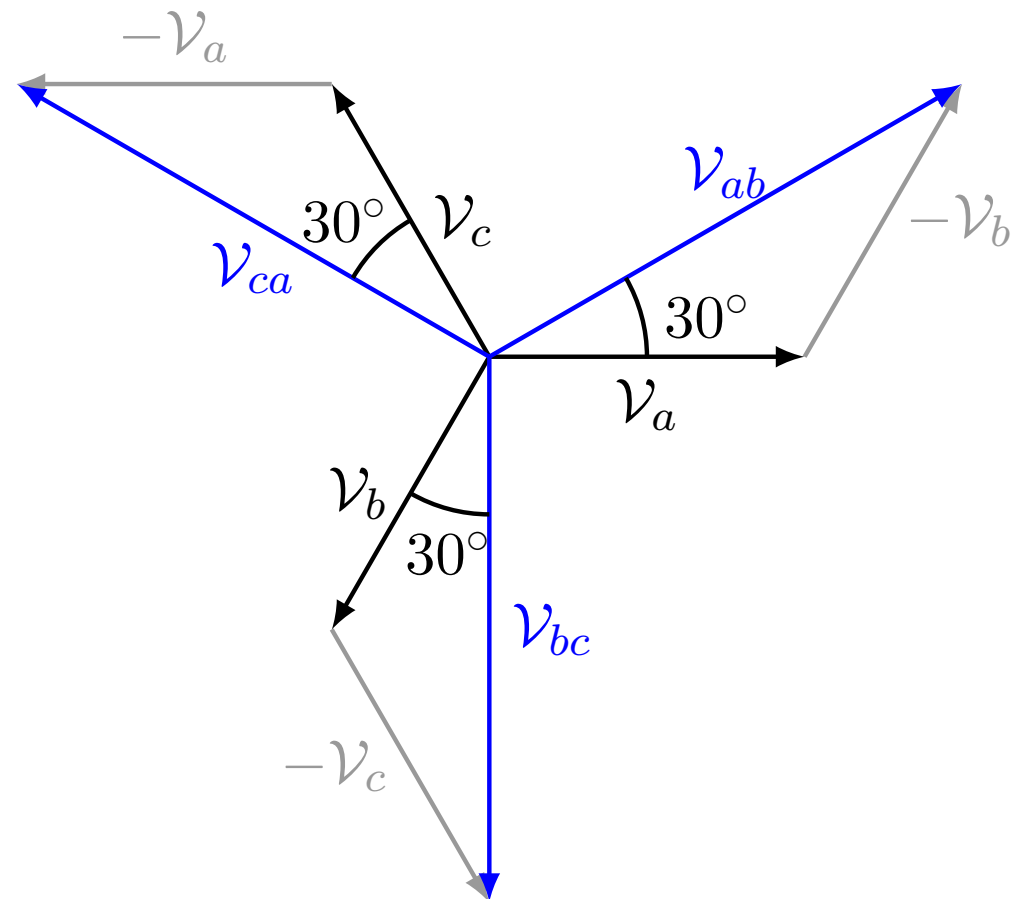
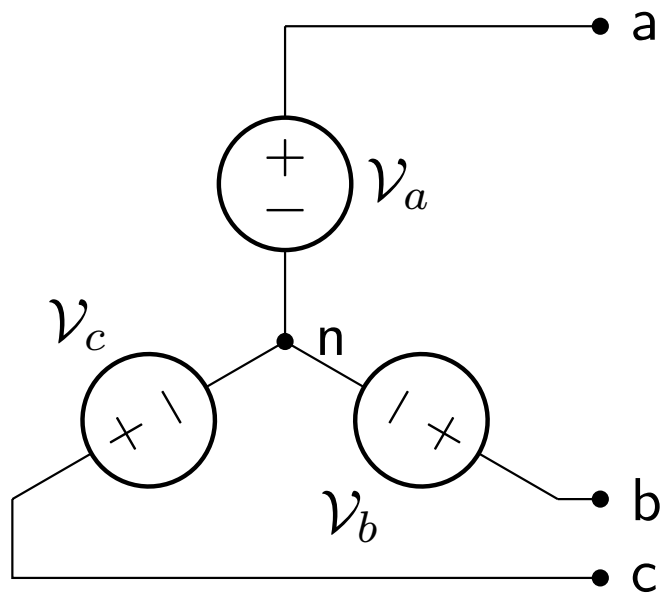


Secuencia inversa



Alternador trifásico

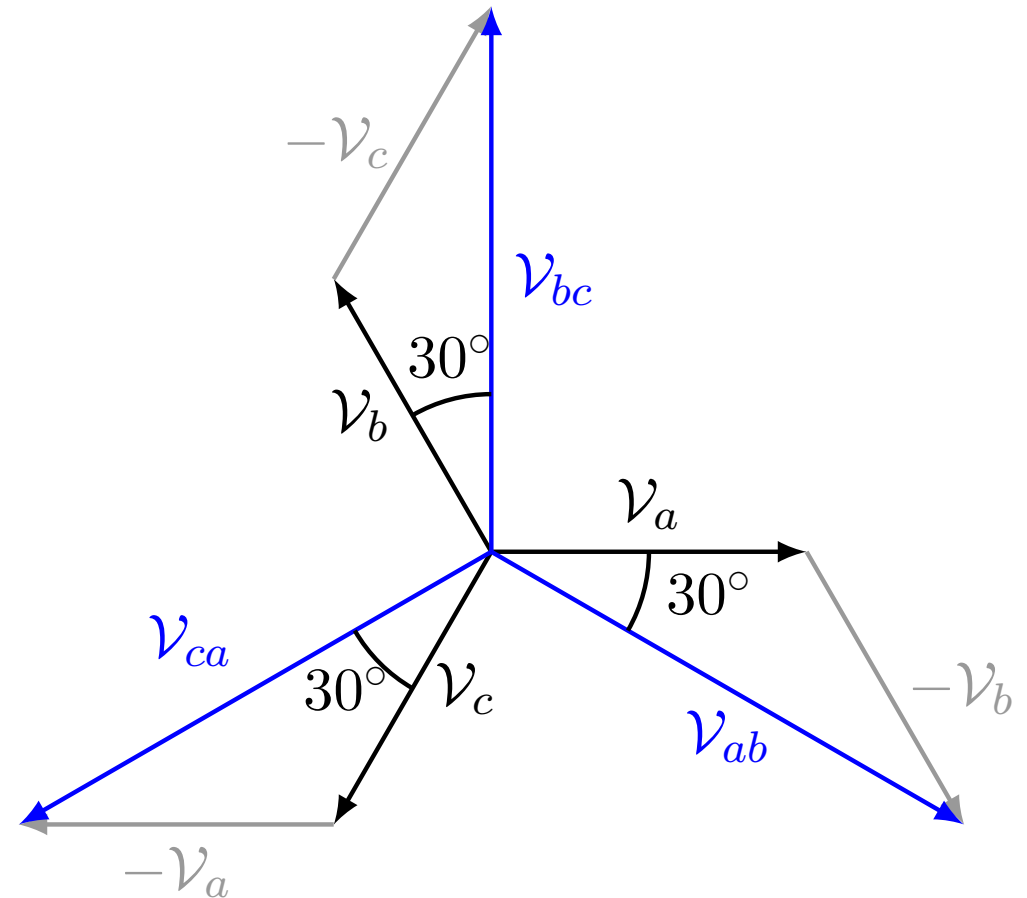
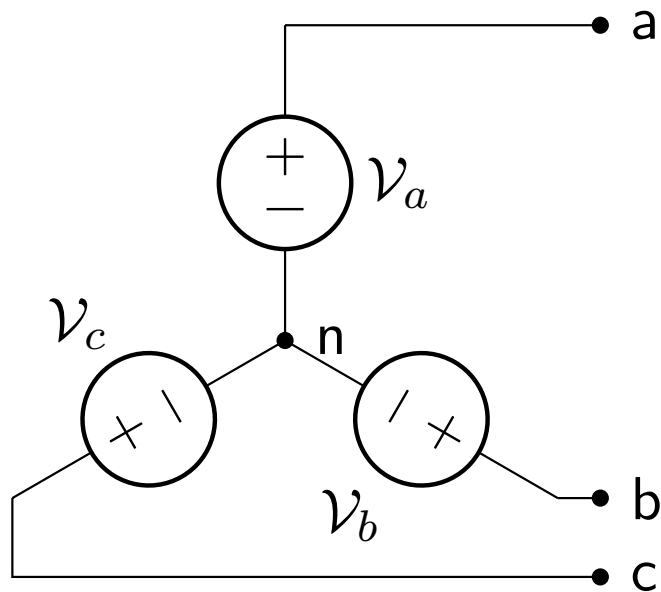
$\mathcal{V}_a$, $\mathcal{V}_b$ y $\mathcal{V}_c$ forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. directa)



- El módulo de la tensión entre dos fases es $\sqrt{3}$ veces el de la tensión de fase
- La tensión entre dos fases **adelanta** 30° a la tensión de fase

Alternador trifásico

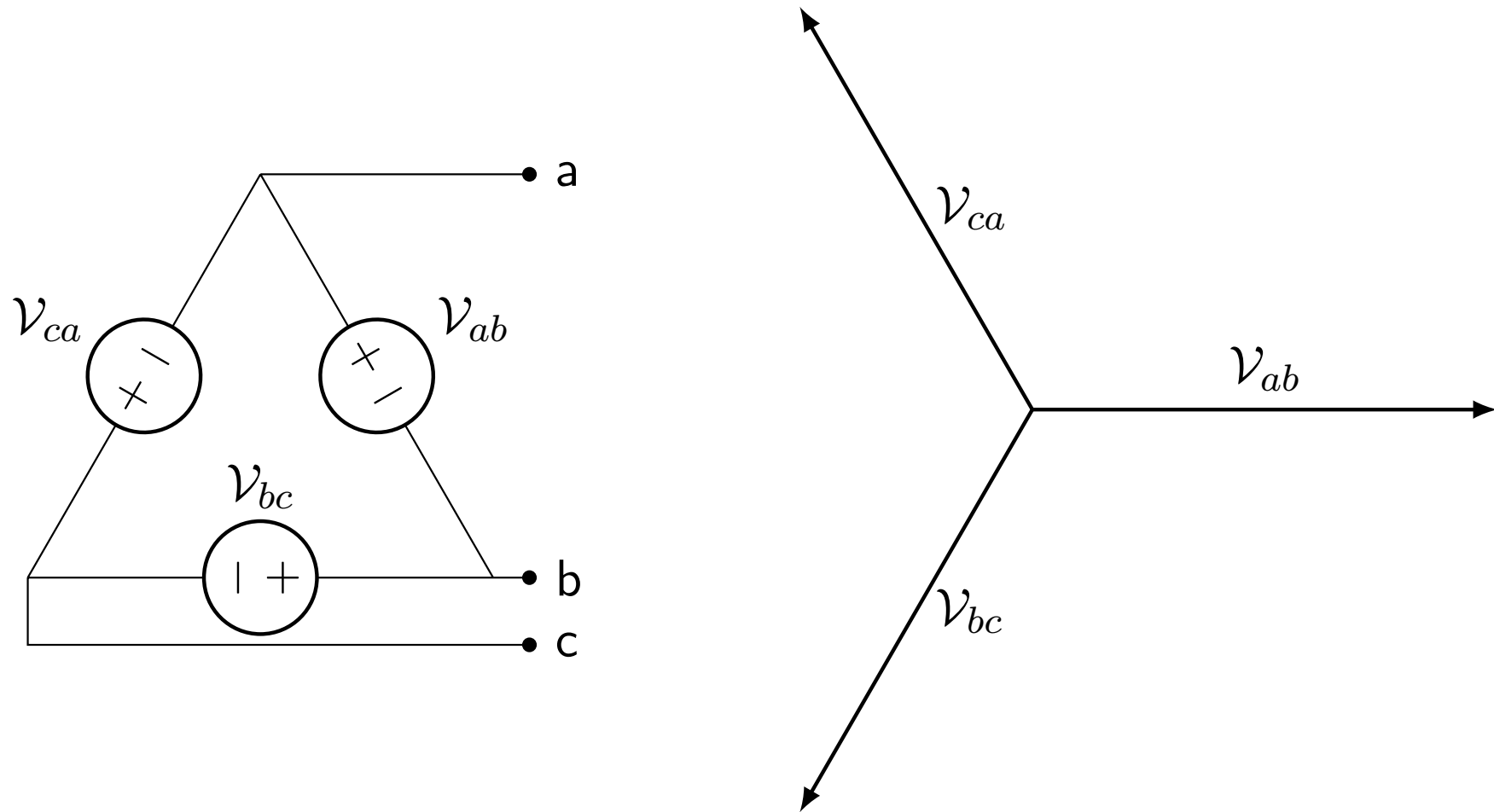
$\mathcal{V}_a$, $\mathcal{V}_b$ y $\mathcal{V}_c$ forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. inversa)



- El módulo de la tensión entre dos fases es $\sqrt{3}$ veces el de la tensión de fase
- La tensión entre dos fases **retrasa** 30° a la tensión de fase

Alternador trifásico

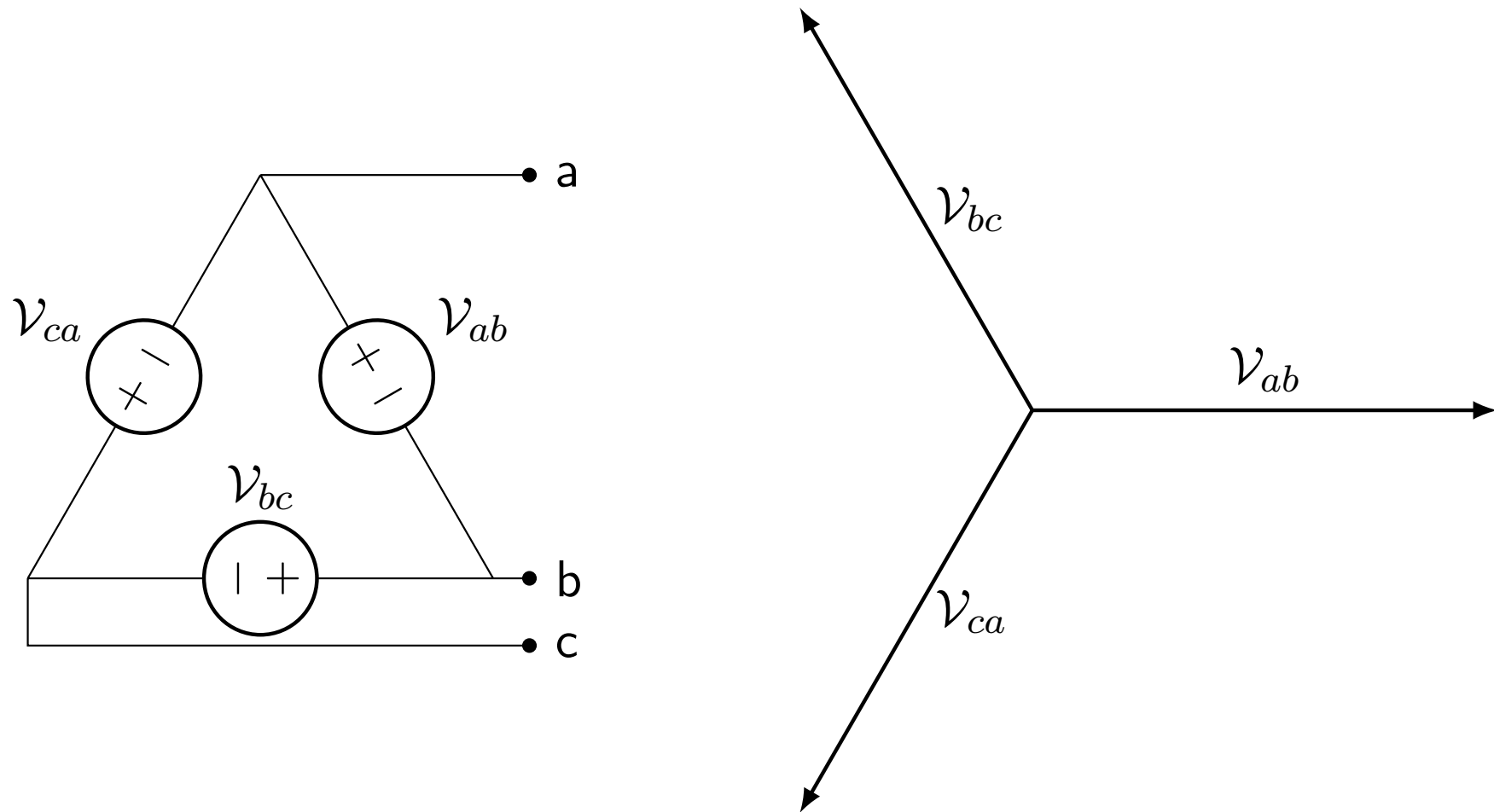
$\mathcal{V}_{ab}$, $\mathcal{V}_{bc}$ y $\mathcal{V}_{ca}$ forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. directa)



- La tensión entre dos fases coincide con la tensión de fase

Alternador trifásico

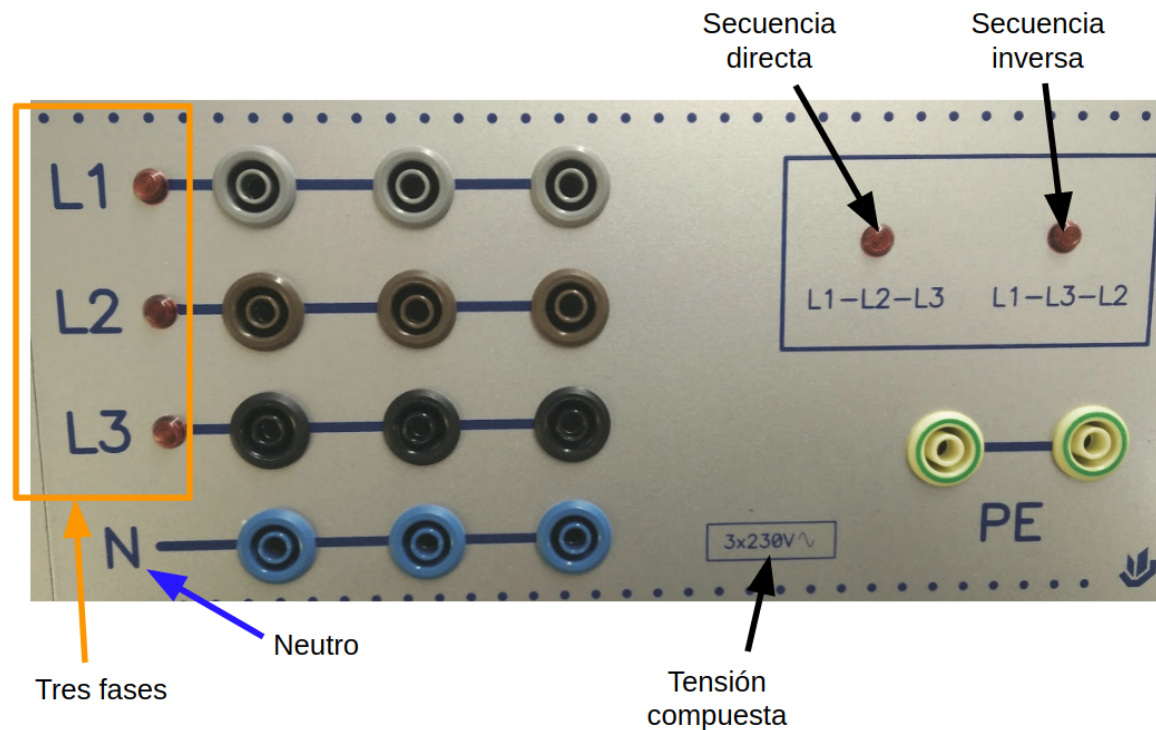
$\mathcal{V}_a$, $\mathcal{V}_b$ y $\mathcal{V}_c$ forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. inversa)



- La tensión entre dos fases coincide con la tensión de fase

Alternador trifásico

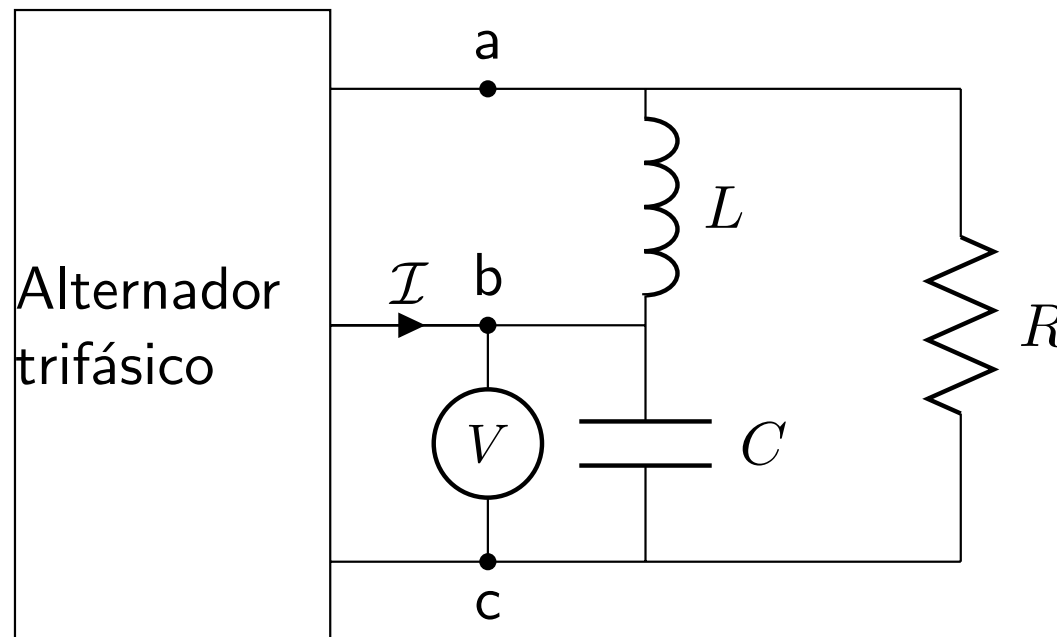
- Lo que nos interesa de un alternador trifásico es:
 - El módulo de la tensión entre dos fases (tensión compuesta)
 - La secuencia



Ejercicio 9-3

Tenemos un alternador trifásico equilibrado. Calcula el módulo de la intensidad $\mathcal{I}$ [A] para los siguientes casos:

- a) Alternador trifásico en estrella y secuencia directa
- b) Alternador trifásico en triángulo y secuencia directa
- c) Alternador trifásico en estrella y secuencia inversa
- d) Alternador trifásico en triángulo y secuencia inversa



Datos:

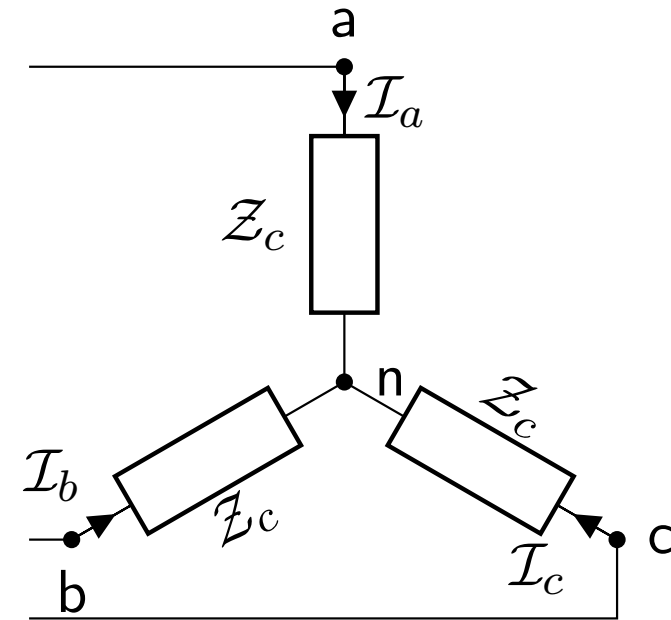
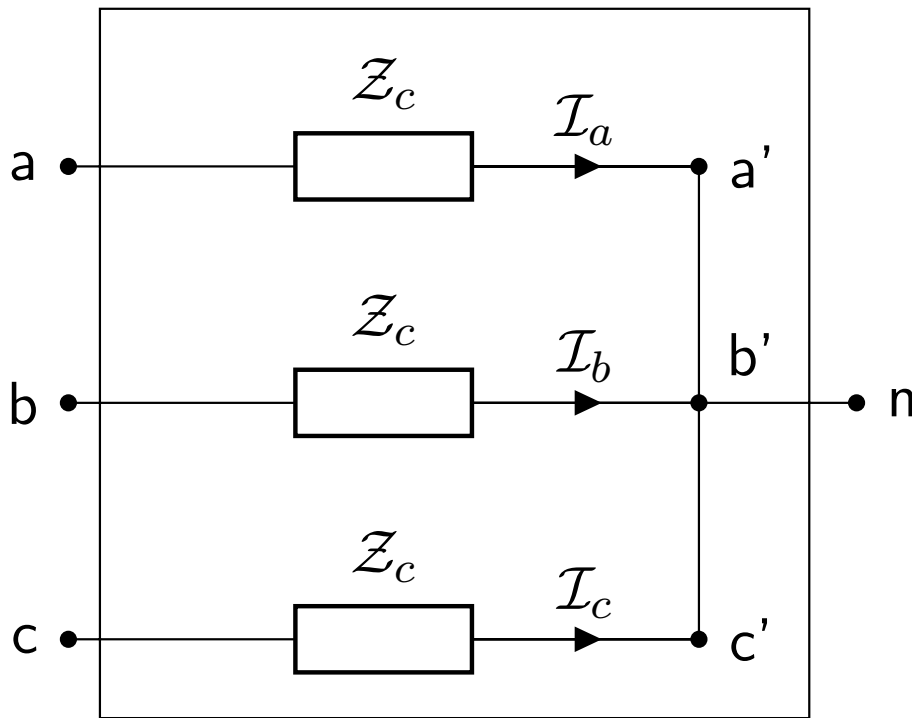
$$V = 200 + 10 \cdot \alpha \text{ [V]}, f = 50 \text{ [Hz]}, L = 10 + \beta \text{ [mH]}, C = \gamma \text{ [\mu F]}, R = \delta \text{ [\Omega]}$$

Solución 9-3

- Dibuja los fasores de las tensiones de fase del alternador trifásico. Ten en cuenta si la secuencia es directa o inversa
- Dibuja los fasores de las tensiones en bornas de la bobina, el condensador y la resistencia
- Dibuja los fasores de las intensidades que atraviesan la bobina, el condensador y la resistencia
- Determina el módulo de las intensidades que atraviesan la bobina, el condensador y la resistencia
- Dibuja el fasor de $\mathcal{I}$ aplicando leyes de Kirchhoff
- Calcula el módulo de $\mathcal{I}$

Carga trifásica

Conexión en estrella de una carga trifásica equilibrada

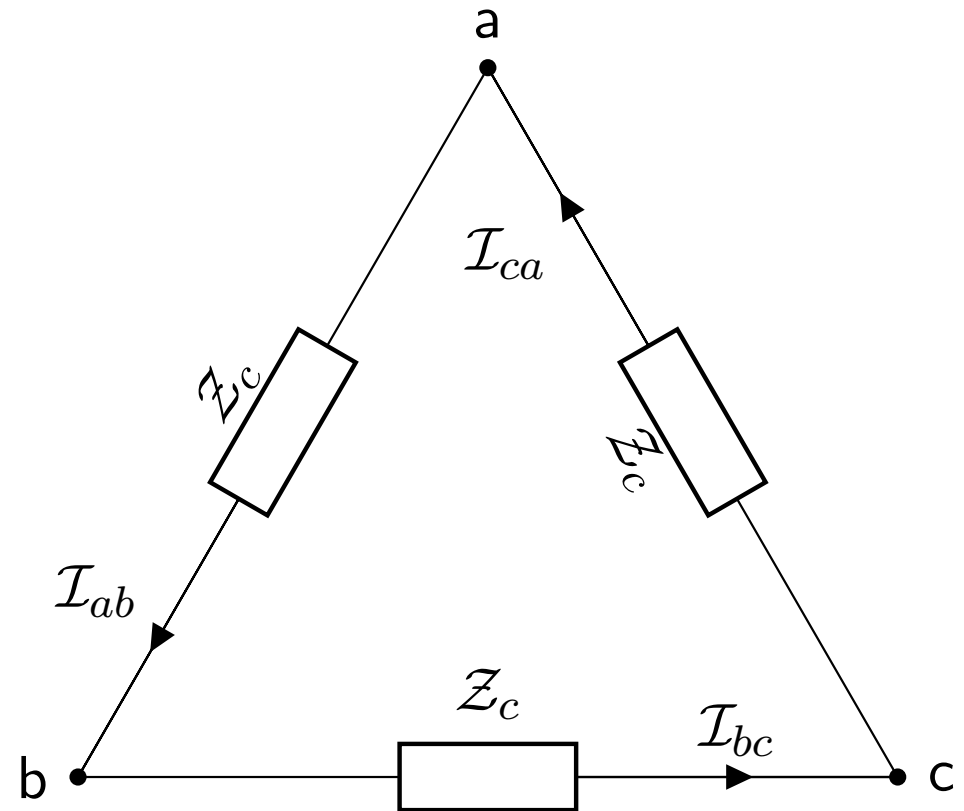
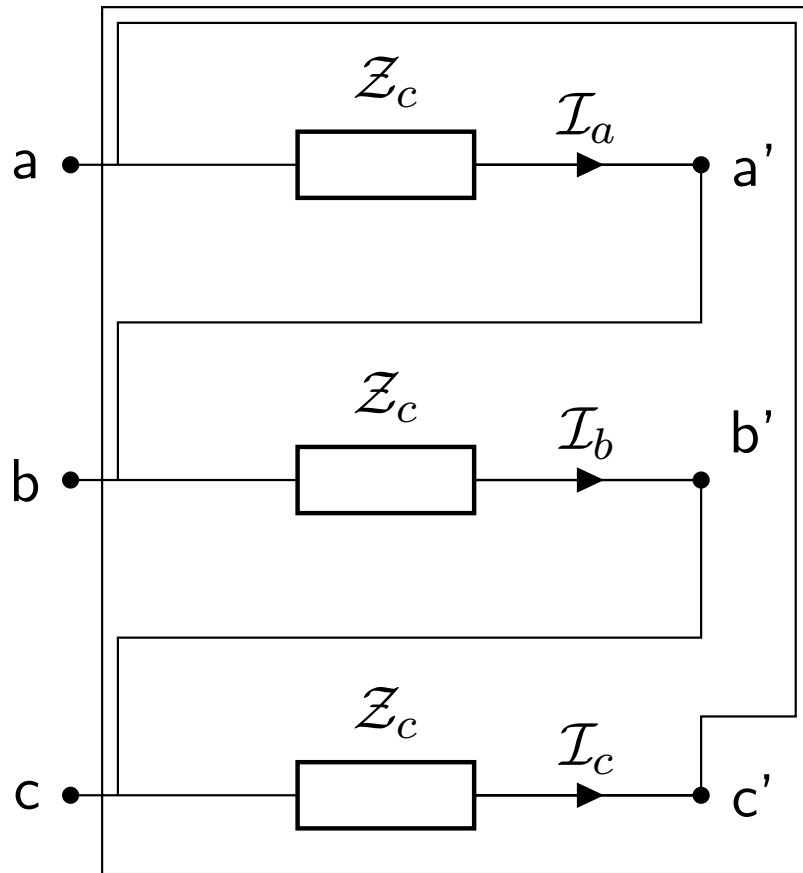


$V_{an}, V_{bn}, V_{cn} \rightarrow$ Tensiones de fase

$I_a, I_b, I_c \rightarrow$ Intensidades de fase

Carga trifásica

Conexión en triángulo de una carga trifásica equilibrada

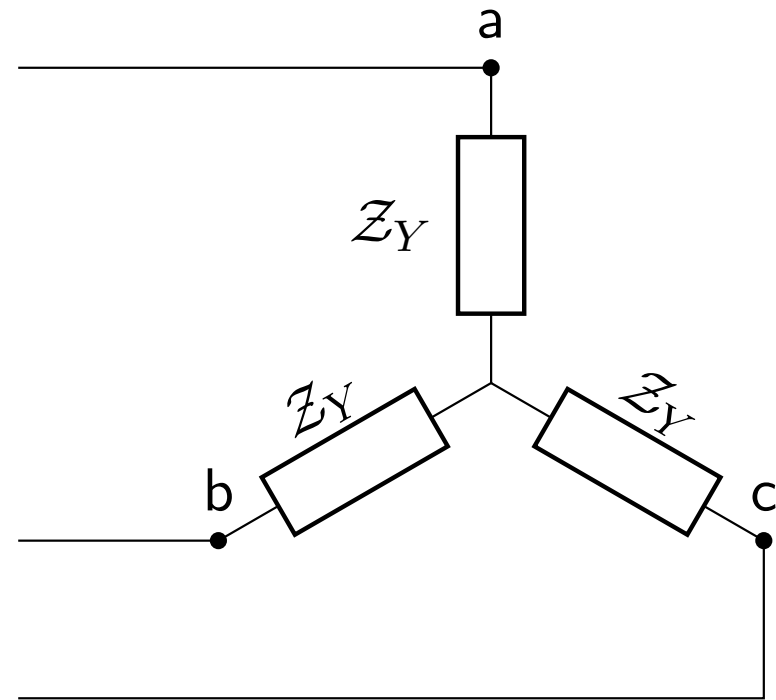
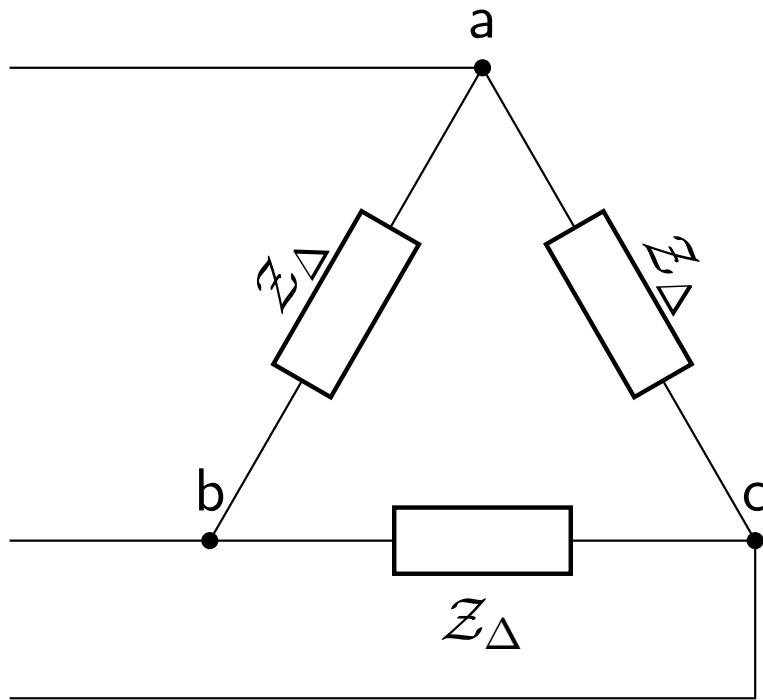


$V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} \rightarrow$ Tensiones de fase

$I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} \rightarrow$ Intensidades de fase

Carga trifásica

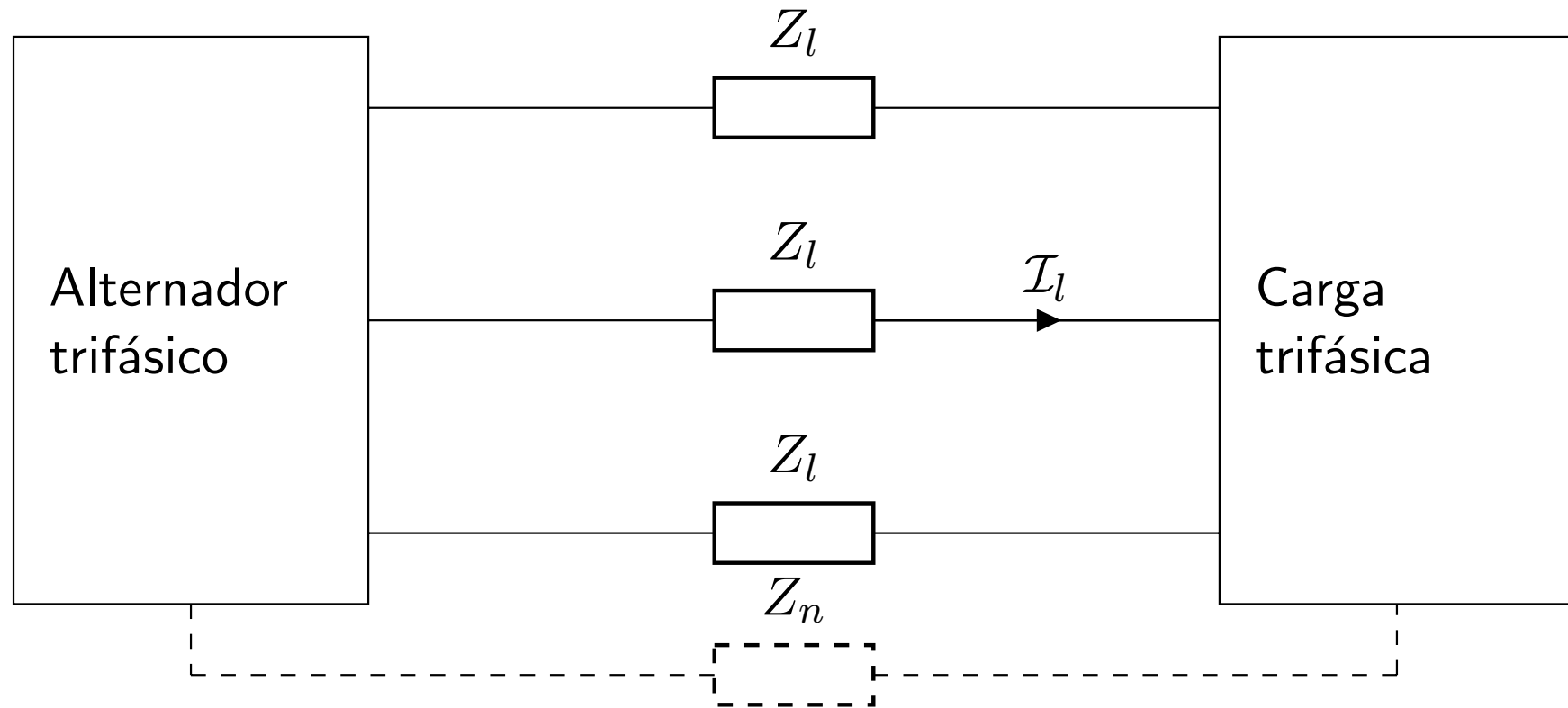
Conversión estrella-triángulo de cargas trifásicas equilibradas



$$Z_{\Delta} = 3Z_Y$$

Línea trifásica

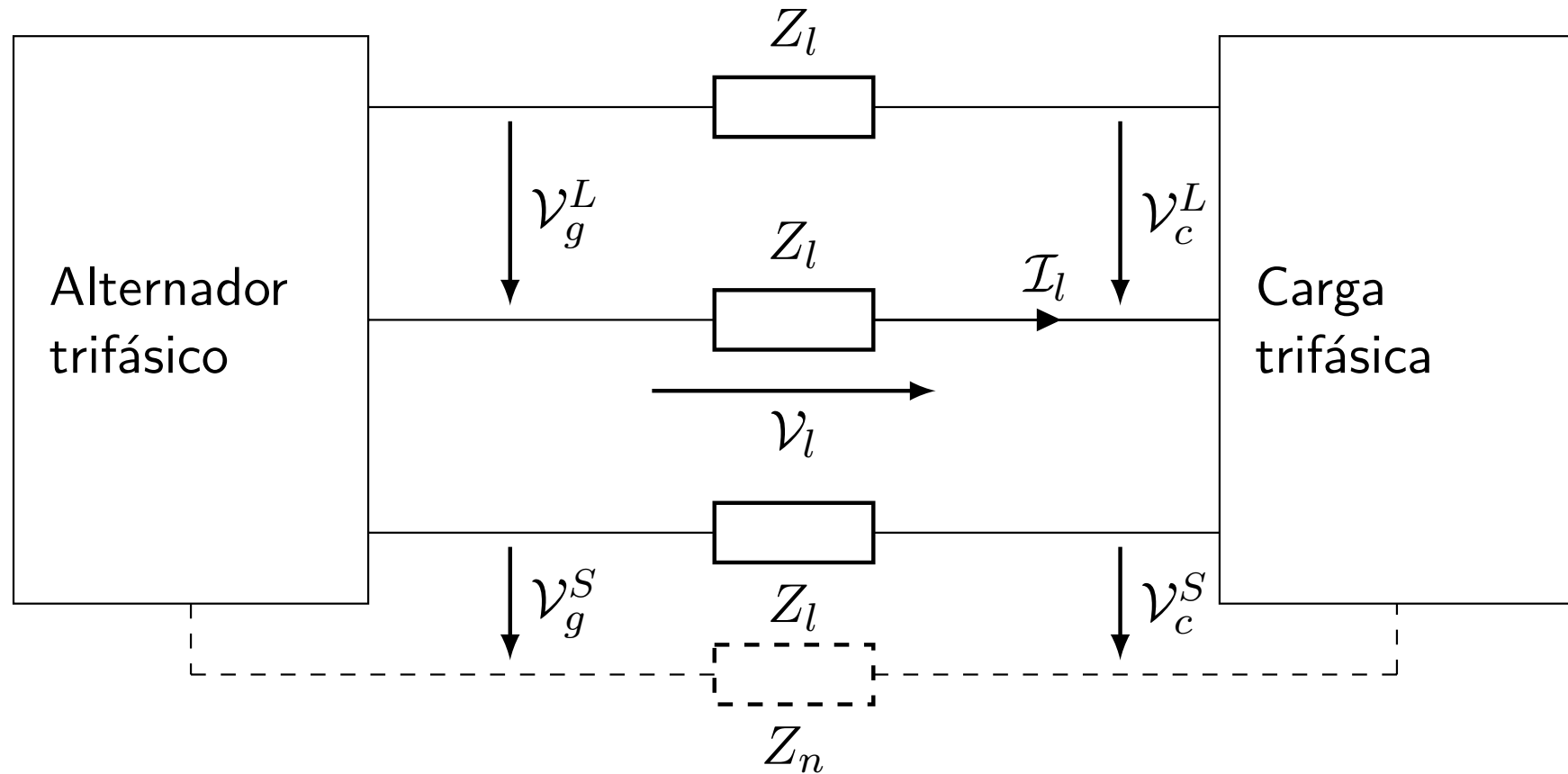
Una línea trifásica conecta un alternador trifásico y una carga trifásica



- Normalmente la conexión es a 3 cables (circuitos equilibrados)
- La conexión a 4 cables sólo es posible para alternador y carga en estrella

Línea trifásica

Una línea trifásica conecta un alternador trifásico y una carga trifásica



$\mathcal{V}_g^L / \mathcal{V}_c^S \rightarrow$ Tensión de línea/simple en bornas del generador

$\mathcal{V}_c^L / \mathcal{V}_c^S \rightarrow$ Tensión de línea/simple en bornas de la carga

$\mathcal{I}_L \rightarrow$ Intensidad de línea

$\mathcal{V}_L \rightarrow$ Caída de tensión en la línea

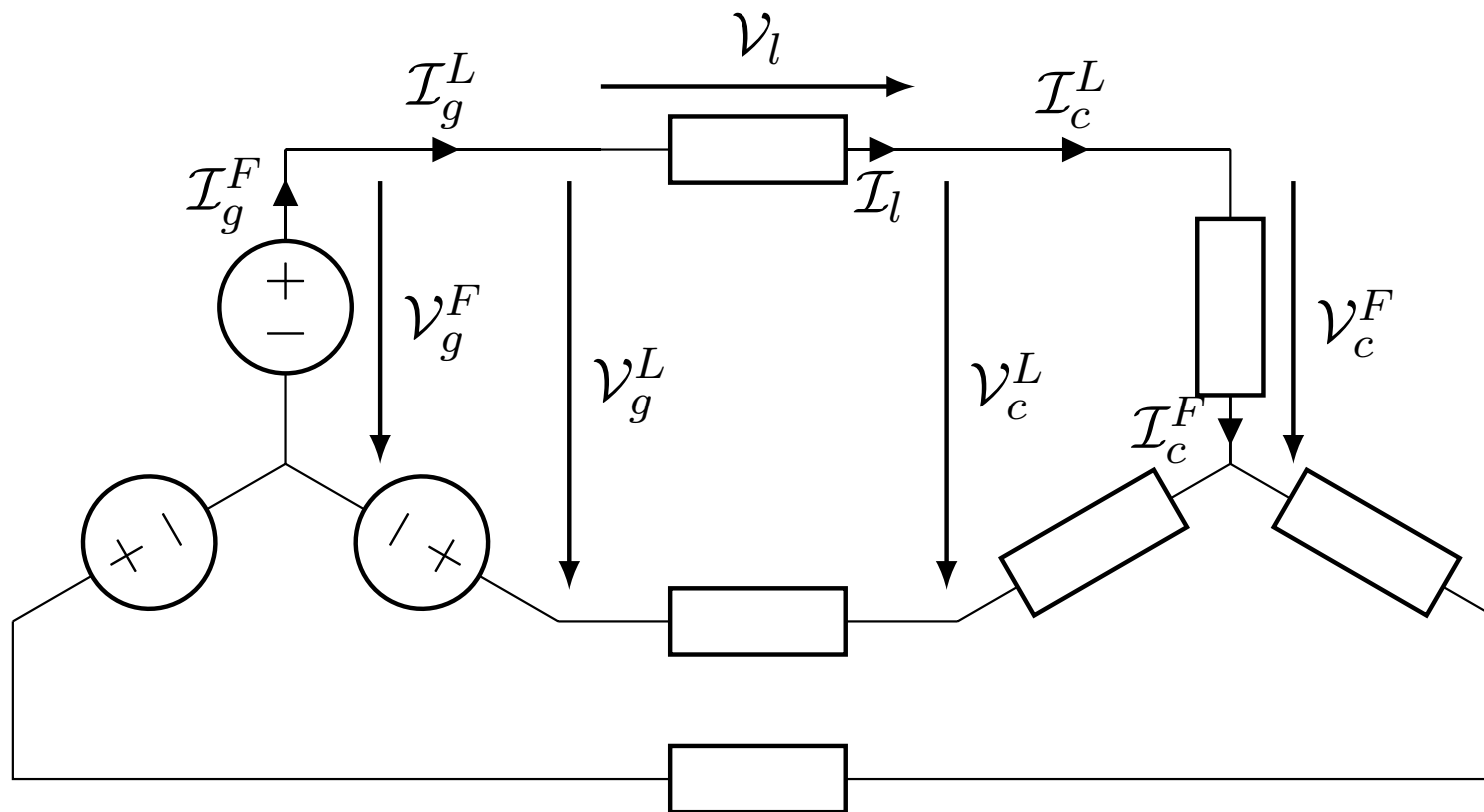
Magnitudes en circuitos trifásicos

- Magnitudes en generadores y cargas
 - Tensión de fase: tensión en cada fase del generador/carga
 - Intensidad de fase: intensidad en cada fase del generador/carga
- Magnitudes en líneas
 - Intensidad de línea: intensidad por cada conductor
 - Tensión de línea/fase-fase/compuesta: tensión entre dos fases
 - Tensión fase-neutro/simple: tensión entre fase y neutro
 - Se puede calcular la tensión de línea en bornes de generadores y cargas
 - No confundir tensión de línea con caída de tensión en la línea

Circuitos trifásicos equilibrados

- Un circuito trifásico equilibrado está compuesto por
 - Un alternador trifásico equilibrado (tensiones con mismo módulo y desfasadas $\pm 120^\circ$)
 - Líneas trifásica (misma impedancia)
 - Cargas trifásicas equilibradas (misma impedancia en cada fase)
- En un circuito trifásico equilibrado se cumple que:
 - Las tres intensidades de línea están equilibradas (mismo módulo y desfasadas $\pm 120^\circ$)
 - Las tensiones de línea y simples en cualquier punto de la línea trifásica también están equilibradas (mismo módulo y desfasadas $\pm 120^\circ$)

Circuitos trifásicos equilibrados



$$\begin{aligned}
 |\mathcal{V}_g^L| &= \sqrt{3} |\mathcal{V}_g^F| \\
 |\mathcal{V}_c^L| &= \sqrt{3} |\mathcal{V}_c^F| \\
 |\mathcal{I}_g^L| &= |\mathcal{I}_g^F| \\
 |\mathcal{I}_c^L| &= |\mathcal{I}_c^F|
 \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_g^F \rightarrow$ Tensión de fase generador

$\mathcal{I}_g^F \rightarrow$ Intensidad de fase generador

$\mathcal{V}_c^F \rightarrow$ Tensión de fase carga

$\mathcal{I}_c^F \rightarrow$ Intensidad de fase carga

$\mathcal{V}_l \rightarrow$ Caída de tensión en la línea

$\mathcal{V}_g^L \rightarrow$ Tensión de línea generador

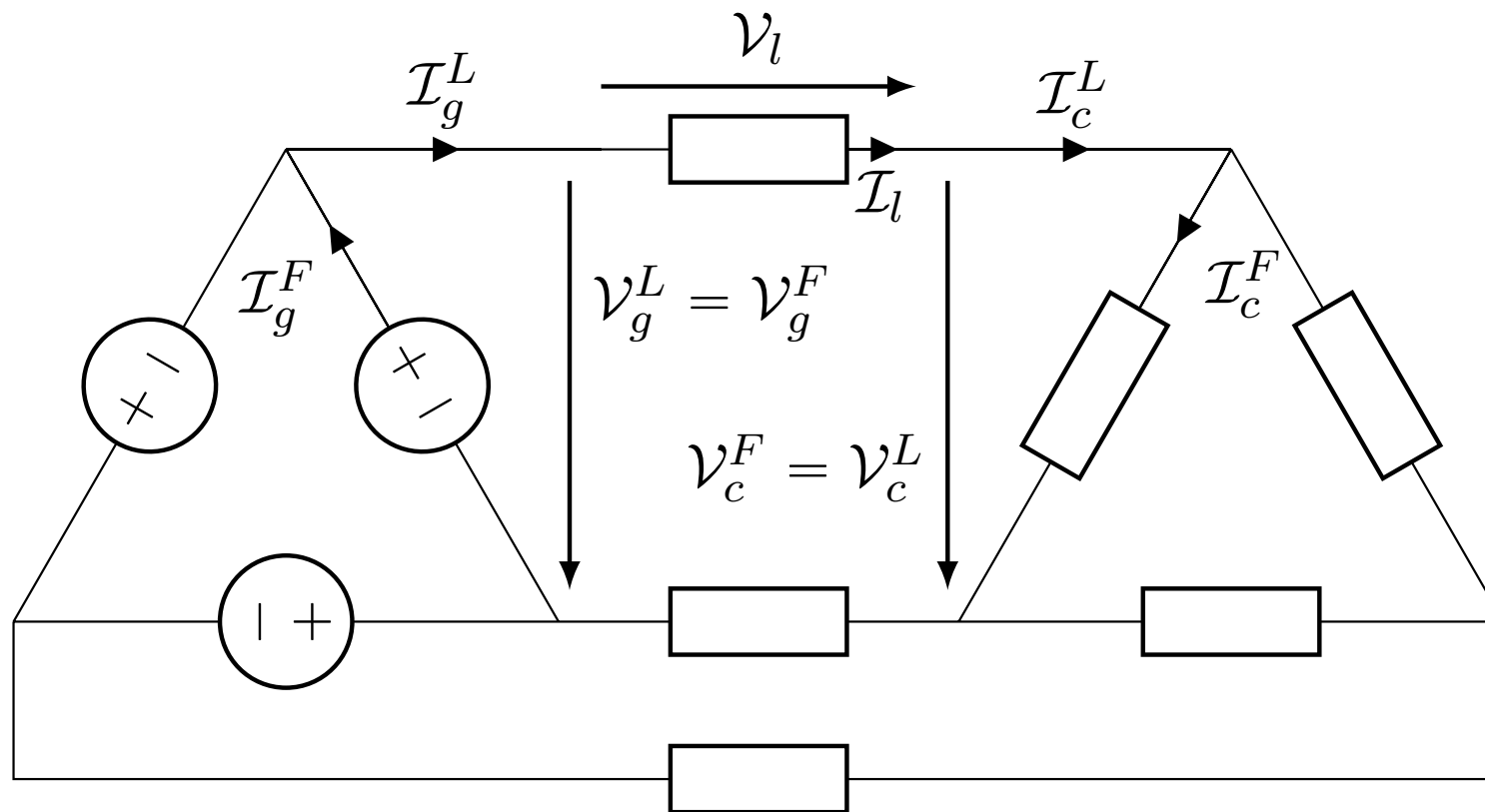
$\mathcal{I}_g^L \rightarrow$ Intensidad de línea generador

$\mathcal{V}_c^L \rightarrow$ Tensión de línea carga

$\mathcal{I}_c^L \rightarrow$ Intensidad de línea carga

$\mathcal{I}_l \rightarrow$ Intensidad de la línea

Circuitos trifásicos equilibrados



$$\begin{aligned} |\mathcal{V}_g^L| &= |\mathcal{V}_g^F| \\ |\mathcal{V}_c^L| &= |\mathcal{V}_c^F| \\ |\mathcal{I}_g^L| &= \sqrt{3}|\mathcal{I}_g^F| \\ |\mathcal{I}_c^L| &= \sqrt{3}|\mathcal{I}_c^F| \end{aligned}$$

$\mathcal{V}_g^F \rightarrow$ Tensión de fase generador

$\mathcal{I}_g^F \rightarrow$ Intensidad de fase generador

$\mathcal{V}_c^F \rightarrow$ Tensión de fase carga

$\mathcal{I}_c^F \rightarrow$ Intensidad de fase carga

$\mathcal{V}_l \rightarrow$ Caída de tensión en la línea

$\mathcal{V}_g^L \rightarrow$ Tensión de línea generador

$\mathcal{I}_g^L \rightarrow$ Intensidad de línea generador

$\mathcal{V}_c^L \rightarrow$ Tensión de línea carga

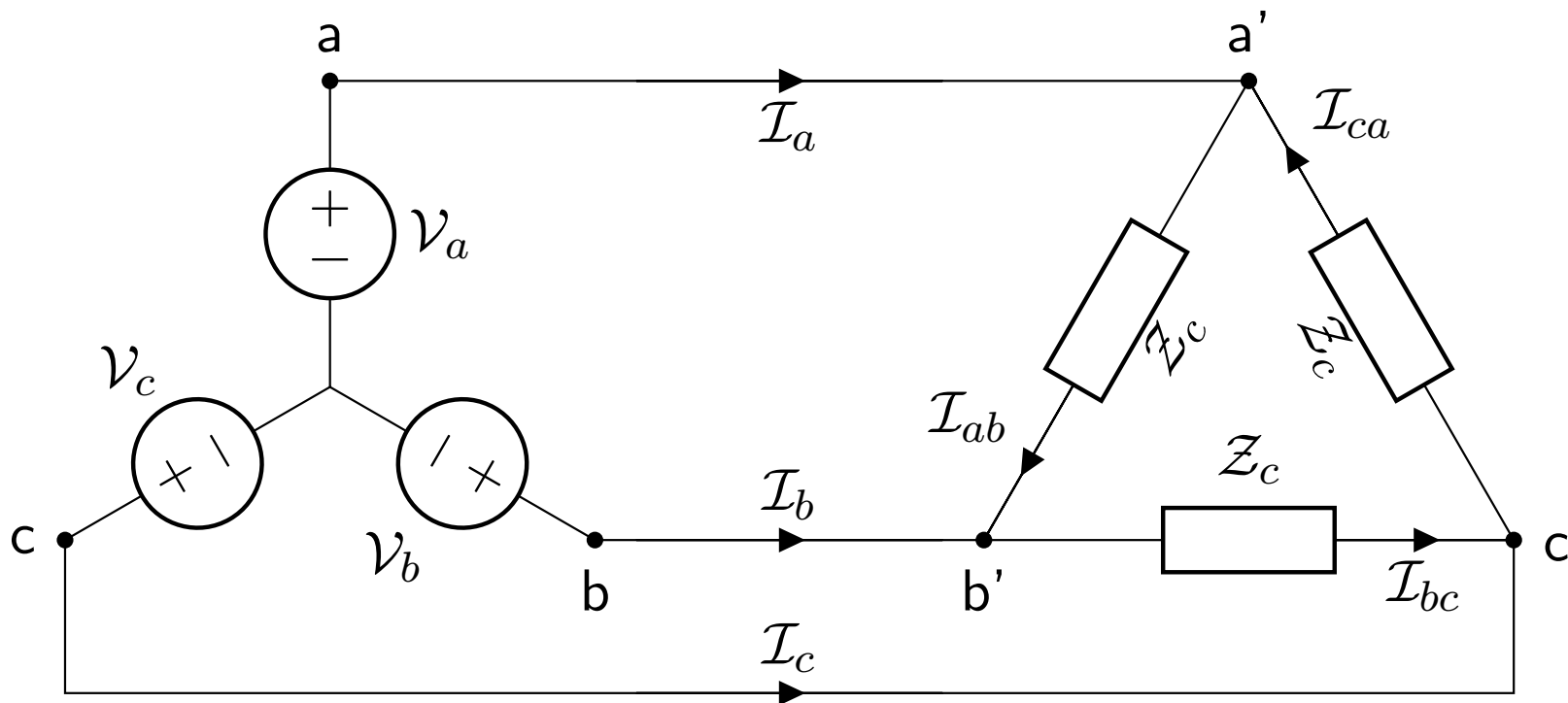
$\mathcal{I}_c^L \rightarrow$ Intensidad de línea carga

$\mathcal{I}_l \rightarrow$ Intensidad de la línea

Ejercicio 9-4

Para el circuito trifásico equilibrado de la figura (s. directa) calcula

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $ \mathcal{I}_a $ [A] | d) $\angle \mathcal{I}_b$ [°] | g) $ \mathcal{I}_{ab} $ [A] | j) $\angle \mathcal{I}_{bc}$ [°] |
| b) $\angle \mathcal{I}_a$ [°] | e) $ \mathcal{I}_c $ [A] | h) $\angle \mathcal{I}_{ab}$ [°] | k) $ \mathcal{I}_{ca} $ [A] |
| c) $ \mathcal{I}_b $ [A] | f) $\angle \mathcal{I}_c$ [°] | i) $ \mathcal{I}_{bc} $ [A] | l) $\angle \mathcal{I}_{ca}$ [°] |

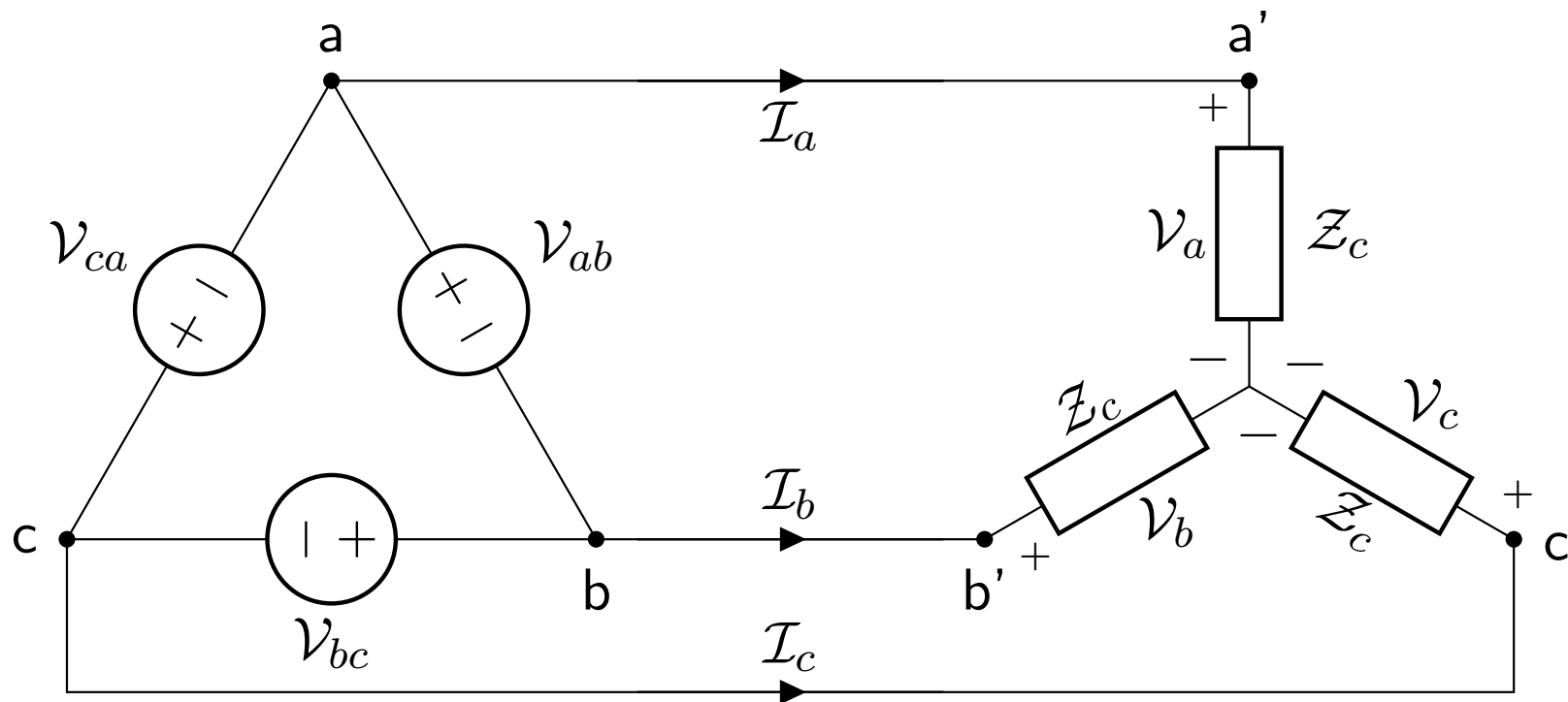


Datos: $\mathcal{V}_a = 200 + 10 \cdot \lambda \angle 0^\circ$, $\mathcal{V}_b = 200 + 10 \cdot \lambda \angle -120^\circ$, $\mathcal{V}_c = 200 + 10 \cdot \lambda \angle 120^\circ$, $\mathcal{Z}_c = \alpha + \beta j$ [Ω]

Ejercicio 9-5

Para el circuito trifásico equilibrado de la figura (s. directa) calcula

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $ \mathcal{I}_a $ [A] | d) $\angle \mathcal{I}_b$ [°] | g) $ \mathcal{V}_a $ [A] | j) $\angle \mathcal{V}_b$ [°] |
| b) $\angle \mathcal{I}_a$ [°] | e) $ \mathcal{I}_c $ [A] | h) $\angle \mathcal{V}_a$ [°] | k) $ \mathcal{V}_c $ [A] |
| c) $ \mathcal{I}_b $ [A] | f) $\angle \mathcal{I}_c$ [°] | i) $ \mathcal{V}_b $ [A] | l) $\angle \mathcal{V}_c$ [°] |

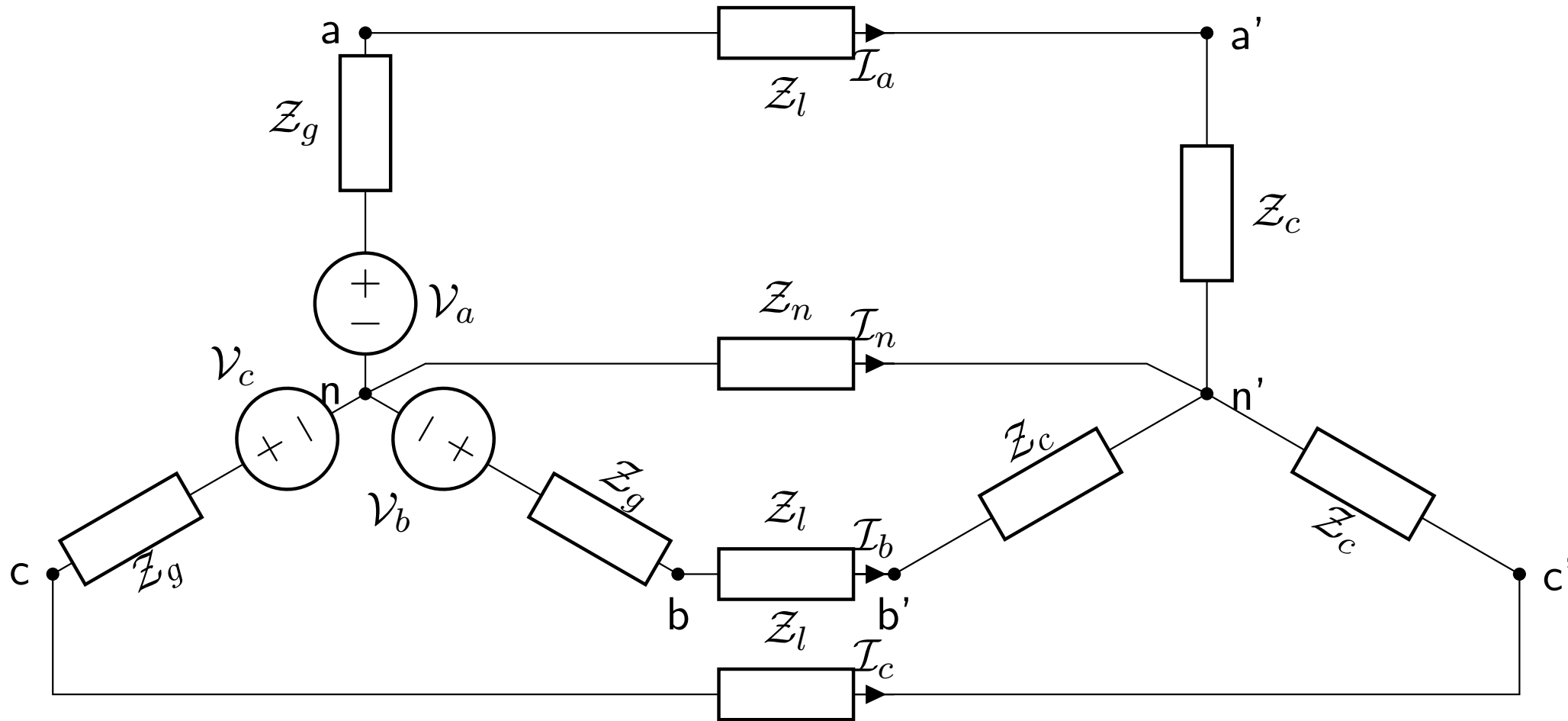


Datos: $\mathcal{V}_{ab} = 200 + 10 \cdot \lambda \angle 0^\circ$, $\mathcal{V}_{bc} = 200 + 10 \cdot \lambda \angle -120^\circ$, $\mathcal{V}_{ca} = 200 + 10 \cdot \lambda \angle 120^\circ$, $\mathcal{Z}_c = \alpha + \beta j$ [Ω]

Circuitos monofásicos equivalentes

- En los circuitos trifásicos equilibrados (CTE) todas las tensiones e intensidades están equilibradas (mismo módulo y desfasadas 120°).
- El análisis de CTE se suele hacer usando el circuito monofásico equivalente
- En un circuito monofásico equivalente solo consideramos una de las fases
- Los circuitos monofásicos equivalentes que vamos a ver son dos:
 - Conexión estrella-estrella
 - Conexión triángulo-triángulo
- Si el circuito no tiene ninguna de estas disposiciones aplicaremos transformación de fuentes o cargas trifásicas

Circuitos monofásicos equivalentes (Estrella-Estrella)



Como el circuito trifásico es equilibrado

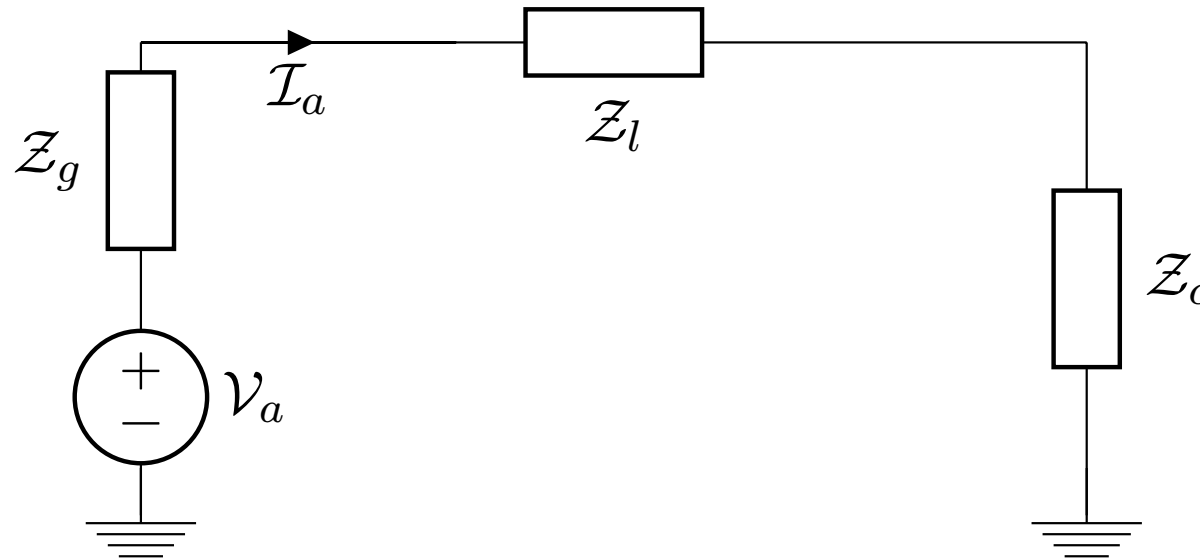
$$I_n = 0 \implies V_{nn'} = 0 \implies V_n = V_{n'}$$

Aplicando LKT entre n y n' por la fase a obtenemos la siguiente ecuación

$$-V_a + Z_g I_a + Z_l I_a + Z_c I_a = 0$$

Circuitos monofásicos equivalentes (Estrella-Estrella)

Construimos el siguiente circuito monofásico equivalente



Aplicamos la LKT al circuito monofásico

$$-\mathcal{V}_a + Z_g \mathcal{I}_a + Z_l \mathcal{I}_a + Z_c \mathcal{I}_a = 0$$

Observamos que la ecuación es exactamente la misma que en el caso del circuito trifásico. El monofásico de un CTE estrella-estrella incluye:

- Las impedancias originales de generador, líneas y cargas
- Las tensiones simples o de fase-neutro
- La intensidad de línea

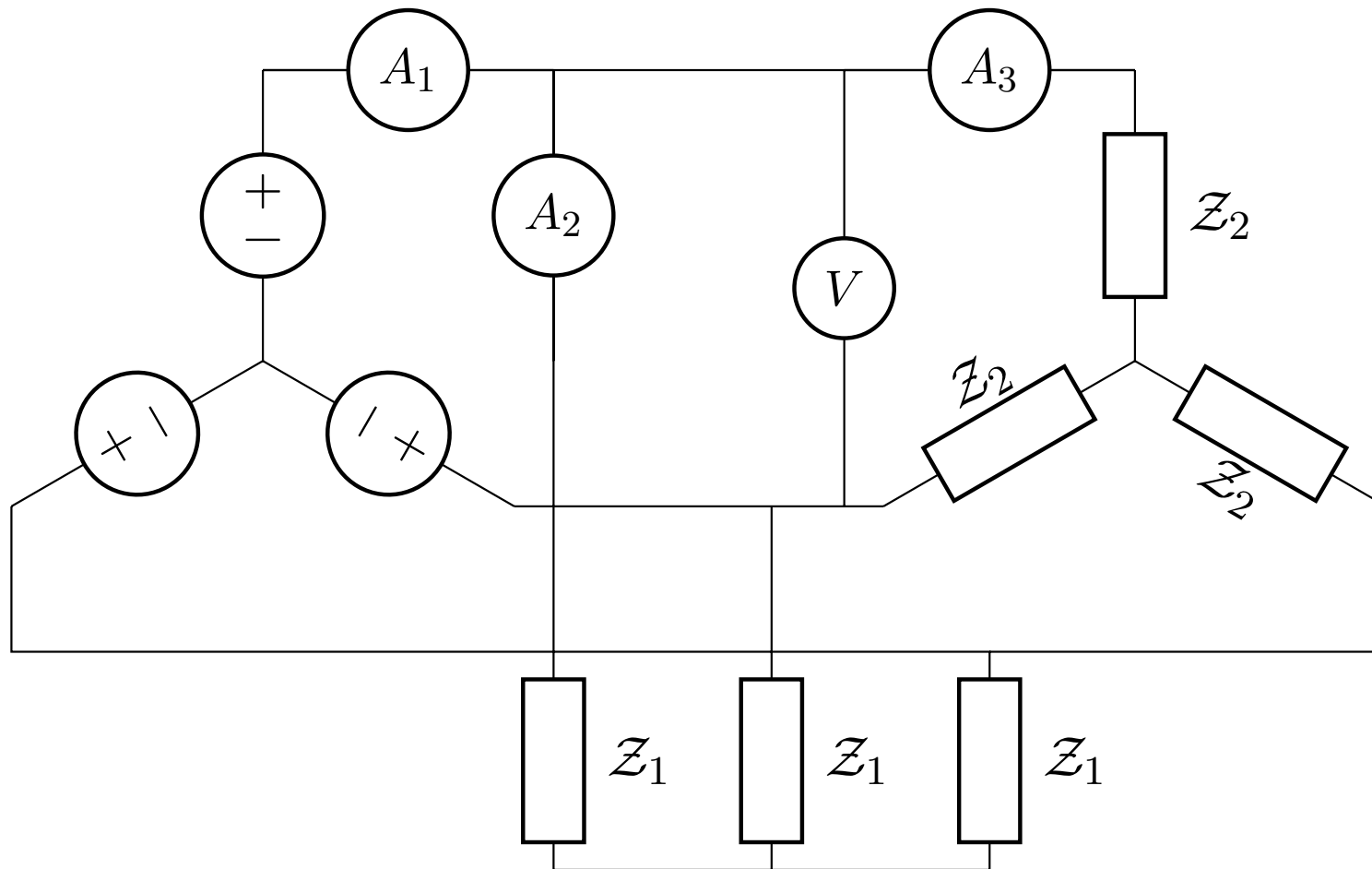
Ejercicio 9-6

Usa el circuito monofásico equivalente Y-Y del CTE de la figura y calcula

a) A_1 [A]

b) A_2 [A]

c) A_3 [A]



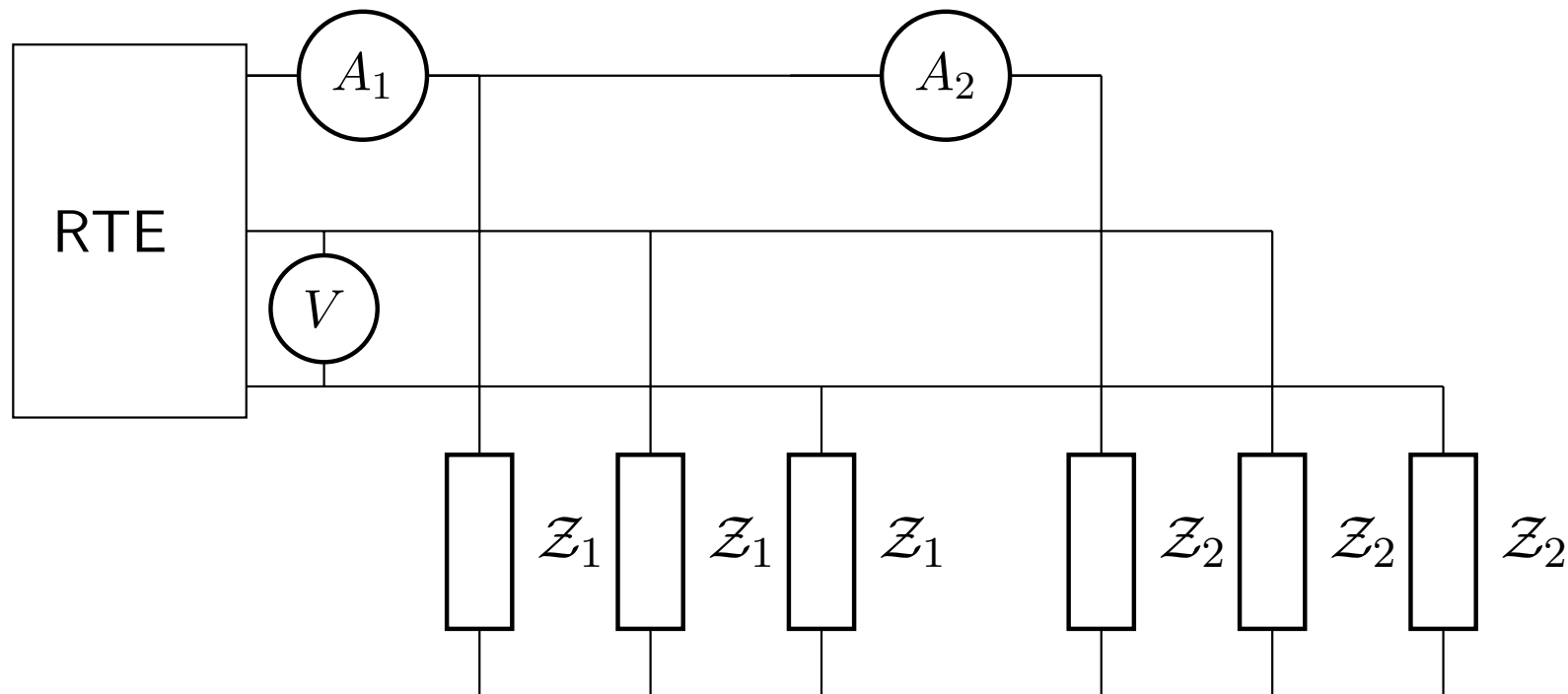
Datos: $V = 200 + 10 \cdot \gamma$ [V], $Z_1 = \delta + j\epsilon$ [Ω], $Z_2 = \eta - j\theta$ [Ω]

Ejercicio 9-7

Una red trifásica equilibrada (RTE) alimenta dos cargas. Usa el circuito monofásico equivalente Y-Y para calcular

a) A_1 [A]

b) a



Datos: $V = 200 + 10 \cdot \kappa$ [V], $A_2 = 10 + \alpha$ [A], $Z_1 = a$ [Ω], $Z_2 = ja$ [Ω]

Ejercicio 9-8

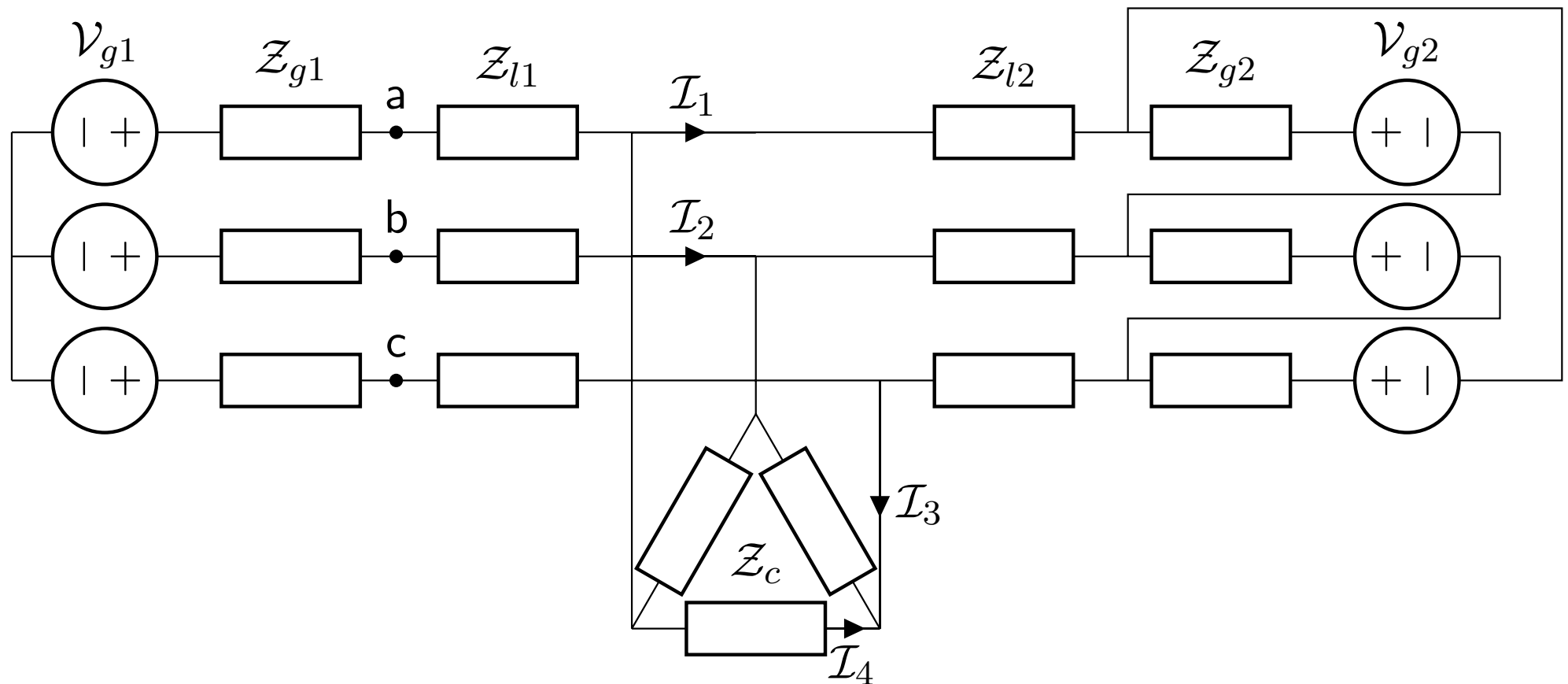
Los dos alternadores del CTE tienen secuencia directa. Usa el equivalente monofásico Y-Y para calcular

a) $|\mathcal{I}_1|$ [A]

b) $|\mathcal{I}_2|$ [A]

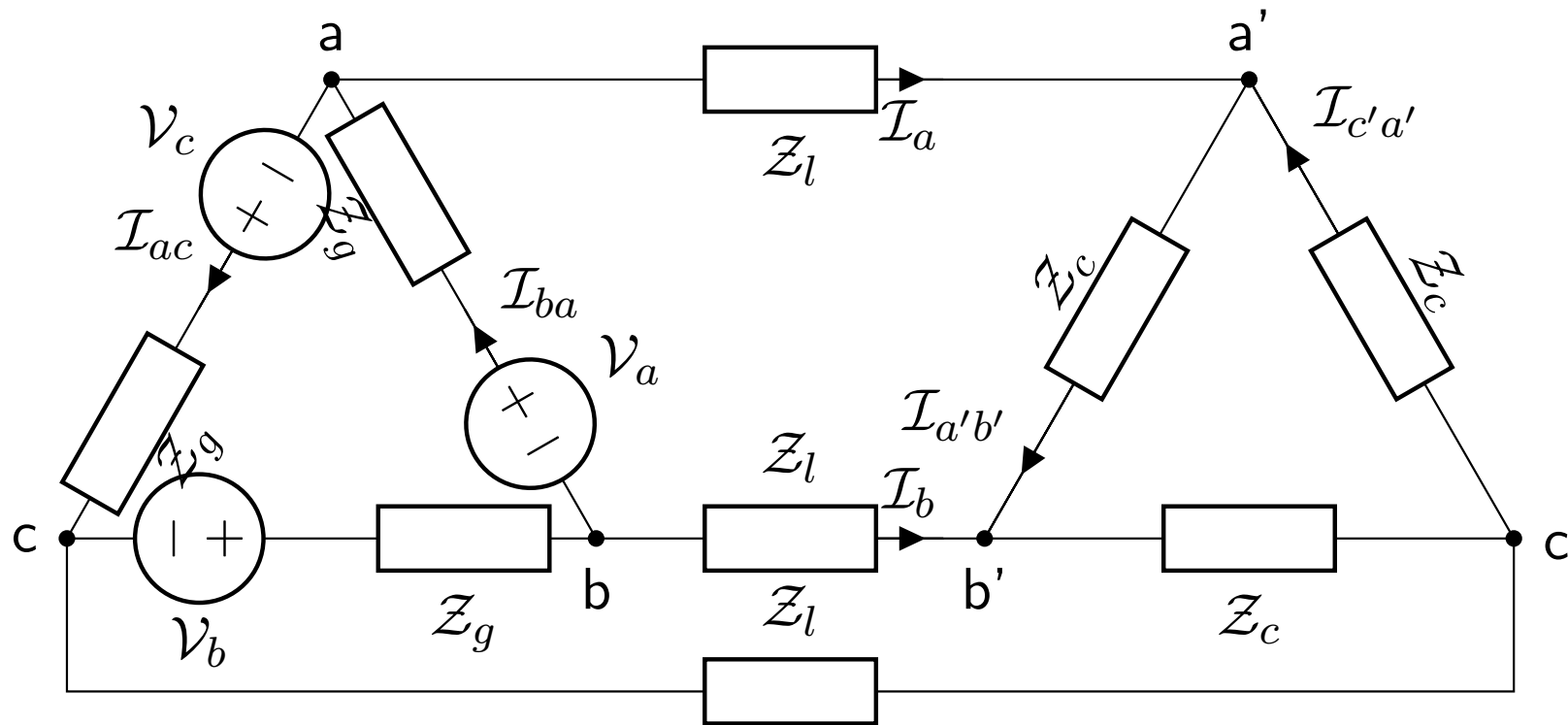
c) $|\mathcal{I}_3|$ [A]

d) $|\mathcal{I}_4|$ [A]



Datos: $\mathcal{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \beta \angle 0^\circ$ [V], $\mathcal{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \gamma \angle 30^\circ$ [V], $\mathcal{Z}_{g1} = j\delta$ [Ω], $\mathcal{Z}_{l1} = \epsilon + j\eta$ [Ω], $\mathcal{Z}_c = \theta - j\kappa$ [Ω], $\mathcal{Z}_{l2} = \lambda + j\alpha$ [Ω], $\mathcal{Z}_{g2} = j\beta$ [Ω]

Circuitos monofásicos equivalentes (Triángulo-Triángulo)



Suponemos secuencia directa y obtenemos

$$\left. \begin{aligned} I_a &= I_{a'b'} - I_{c'a'} = \sqrt{3} \angle -30^\circ I_{a'b'} \\ I_a &= I_{ba} - I_{ac} = \sqrt{3} \angle -30^\circ I_{ba} \end{aligned} \right\} \implies I_{a'b'} = I_{ba}$$

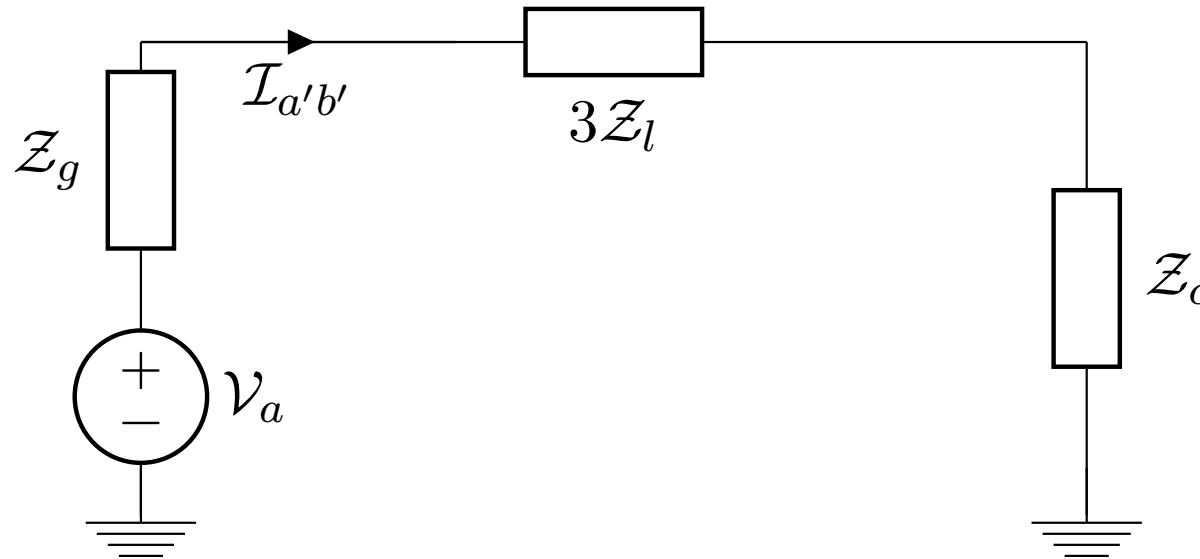
$$I_a - I_b = \sqrt{3} \angle 30^\circ I_a = \sqrt{3} \angle 30^\circ \sqrt{3} \angle -30^\circ I_{a'b'} = 3 I_{a'b'}$$

Aplicando LKT

$$V_a = Z_g I_{ba} + Z_l I_a + Z_c I_{a'b'} - Z_l I_b = (Z_g + 3Z_l + Z_c) I_{a'b'}$$

Circuitos monofásicos equivalentes (Triángulo-Triángulo)

Construimos el siguiente circuito monofásico equivalente



Aplicamos la LKT al circuito monofásico

$$\mathcal{V}_a = (Z_g + 3Z_l + Z_c)\mathcal{I}_{a'b'}$$

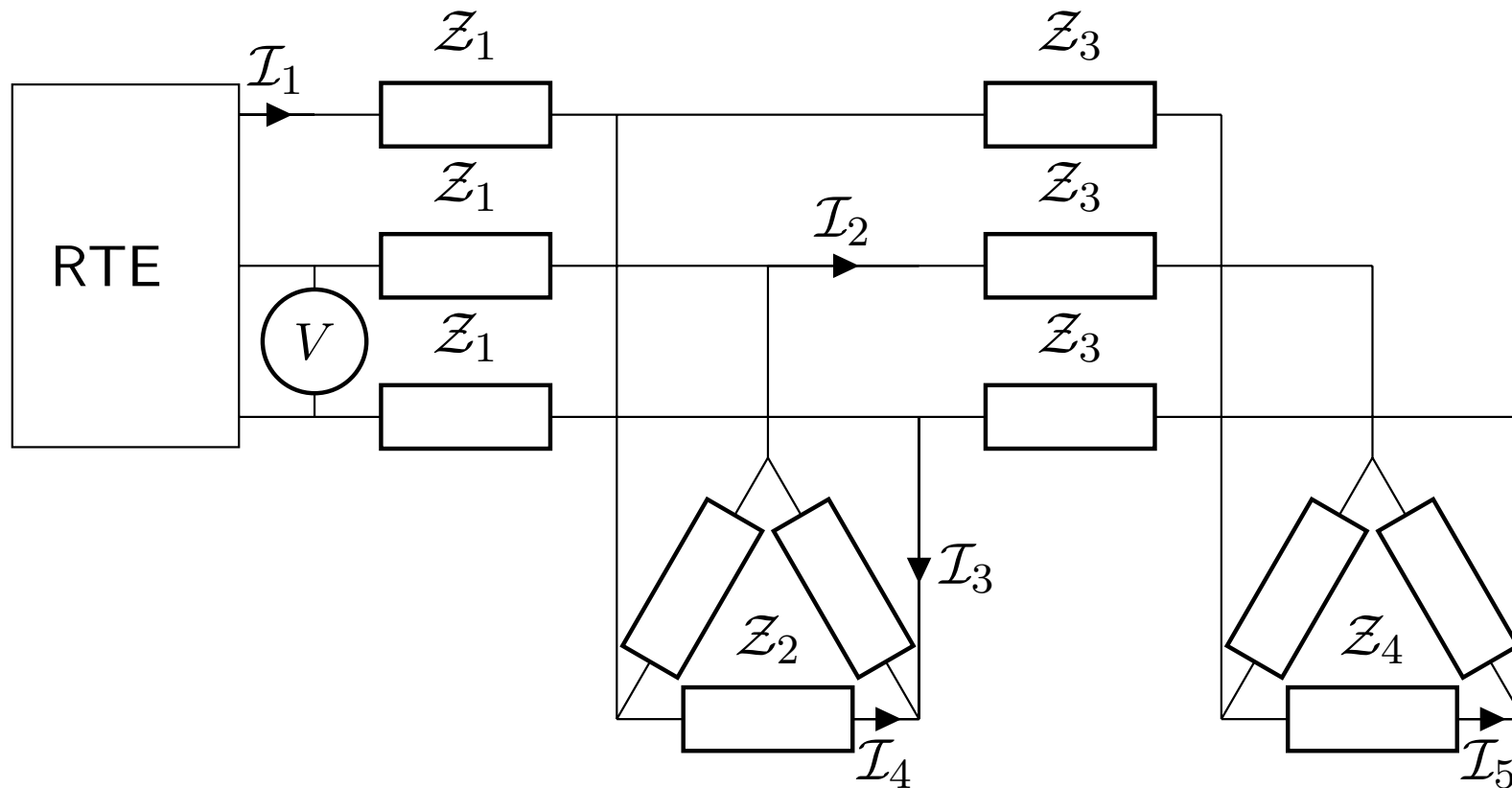
Observamos que la ecuación es exactamente la misma que en el caso del circuito trifásico. El monofásico de un CTE triángulo-triángulo incluye:

- Las impedancias originales de generador y cargas
- Las impedancias de las líneas multiplicadas por 3
- Las tensiones compuestas o de fase-fase
- La intensidad de fase

Ejercicio 9-9

Una red trifásica equilibrada (RTE) alimenta dos cargas. Usa el circuito monofásico equivalente D-D para calcular

- a) $|\mathcal{I}_1|$ [A] b) $|\mathcal{I}_2|$ [A] c) $|\mathcal{I}_3|$ [A] d) $|\mathcal{I}_4|$ [A] e) $|\mathcal{I}_5|$ [A]



Datos: $V = 200 + 10 \cdot \kappa$ [V], $Z_1 = \alpha + j\beta$ [Ω], $Z_2 = 10(\gamma - j\delta)$ [Ω], $Z_3 = \epsilon + j\eta$ [Ω], $Z_4 = 10(\kappa + j\lambda)$ [Ω]

Ejercicio 9-10

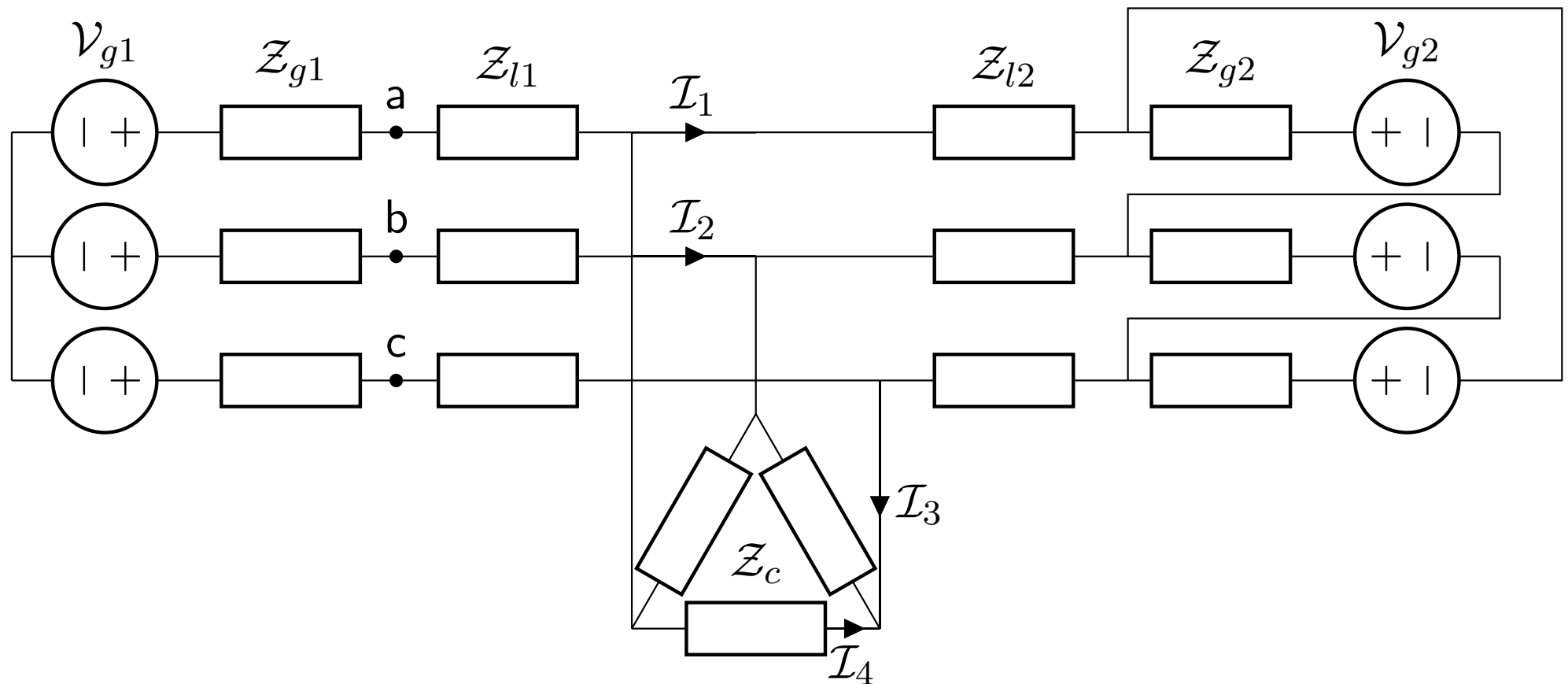
Los dos alternadores del CTE tienen secuencia directa. Usa el equivalente monofásico D-D para calcular

a) $|\mathcal{I}_1|$ [A]

b) $|\mathcal{I}_2|$ [A]

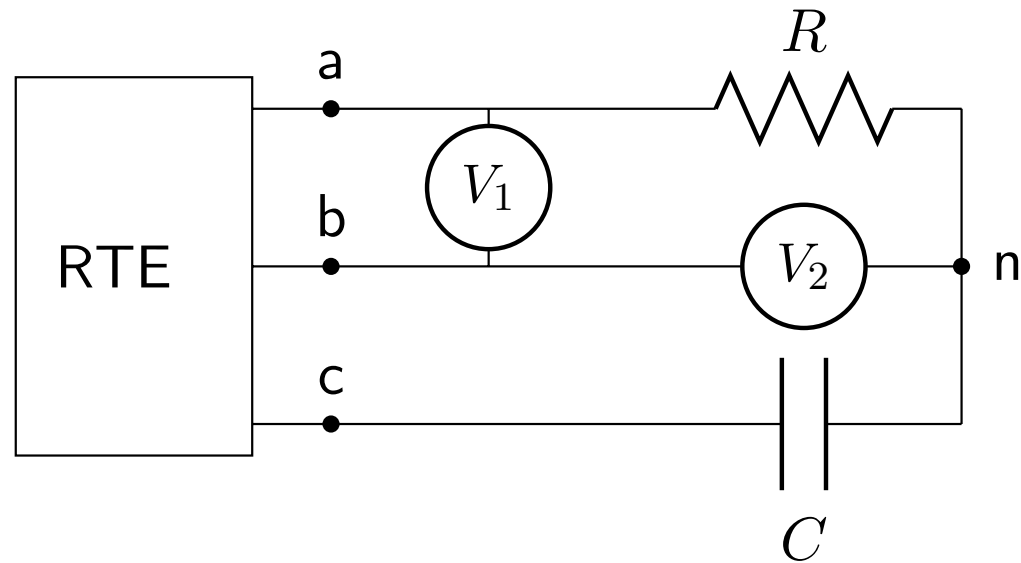
c) $|\mathcal{I}_3|$ [A]

d) $|\mathcal{I}_4|$ [A]



Datos: $\mathcal{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \gamma \angle 0^\circ$ [V], $\mathcal{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \delta \angle 30^\circ$ [V], $\mathcal{Z}_{g1} = j\epsilon$ [Ω], $\mathcal{Z}_{l1} = \eta + j\theta$ [Ω], $\mathcal{Z}_c = \kappa - j\lambda$ [Ω], $\mathcal{Z}_{l2} = \alpha + j\beta$ [Ω], $\mathcal{Z}_{g2} = j\gamma$ [Ω]

Determinación secuencia de fases



Secuencia directa ($V_2 < V_1$)

Secuencia directa ($V_2 > V_1$)

