

Análisis de Redes Eléctricas

Tema 3: Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

- Técnica analítica utilizada en circuitos lineales de parámetros agrupados
- Nos permite analizar circuitos más complicados
- Nos permite determinar la respuesta transitoria con señales más complicadas que un escalón
- La transformada de Laplace de una función se calcula como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Laplace: dominio del tiempo $\rightarrow$ dominio de la frecuencia
- La integral impropia puede no converger. Las funciones $f(t)$ usadas en este curso siempre convergen

Transformada de Laplace (cont)

Función	$f(t)$	$F(s)$
Impulso	$\delta(t)$	1
Escalón	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Seno	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Coseno	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Rampa amort.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Seno amort.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Coseno amort.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Transformada de Laplace (cont)

Multiplicación constante

$$\mathcal{L}\{Kf(t)\} = KF(s)$$

Suma (resta)

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

Diferenciación (t)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

Diferenciación (t)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

Integración (t)

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{\infty} f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Traslación (t)

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s), a > 0$$

Cambio Escala

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Traslación (s)

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

Diferenciación (s)

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Diferenciación (s)

$$\mathcal{L}\{t^2f(t)\} = \frac{d^2F(s)}{ds^2}$$

Integración (s)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du$$

Transformada inversa de Laplace

- 1) Mirar la tabla de transformadas directas
- 2) Intentar aplicar alguna propiedad
- 3) Si es un polinomio de la forma $F(s) = \frac{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}$ y
 - a) $n \geq m \rightarrow$ Dividir polinomios, tabla, y fracciones simples
 - b) $n < m \rightarrow$ Descomponer en fracciones simples

Transformada inversa de Laplace (cont)

a) Raíces del denominador reales y diferentes

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+8} + \frac{C}{s+6}$$

$$A = F(s)s|_{s=0} = \frac{96 \cdot 5 \cdot 12}{6 \cdot 8} = 120$$

$$B = F(s)(s+8)|_{s=-8} = \frac{96 \cdot (-3) \cdot 4}{-8 \cdot (-2)} = -72$$

$$C = F(s)(s+6)|_{s=-6} = \frac{96 \cdot (-1) \cdot 6}{-6 \cdot 2} = 48$$

$$F(s) = \frac{120}{s} + \frac{-72}{s+8} + \frac{48}{s+6}$$

$$f(t) = u(t) (120 - 72e^{-8t} + 48e^{-6t})$$

Transformada inversa de Laplace (cont)

b) Raíces del denominador reales y repetidas

$$F(s) = \frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 5)^3} + \frac{C}{(s + 5)^2} + \frac{D}{s + 5}$$

$$A = F(s)s|_{s=0} = \frac{100 \cdot 25}{5^3} = 20$$

$$B = F(s)(s + 5)^3|_{s=-5} = \frac{100 \cdot 20}{-5} = -400$$

$$C = \left(\frac{d}{ds} F(s)(s + 5)^3 \right) |_{s=-5} = \frac{-100 \cdot 25}{(-5)^2} = -100$$

$$D = \left(\frac{d^2}{ds^2} F(s)(s + 5)^3 \right) |_{s=-5} = \frac{1}{2} \frac{2500 \cdot 2}{(-5)^3} = -20$$

$$F(s) = \frac{100(s + 25)}{s(s + 5)^3} = \frac{20}{s} + \frac{-400}{(s + 5)^3} + \frac{-100}{(s + 5)^2} + \frac{-20}{s + 5}$$

$$f(t) = u(t) \left(20 - 400 \frac{t^2}{2} e^{-5t} - 100t e^{-5t} - 20e^{-5t} \right)$$

Transformada inversa de Laplace (cont)

c) Raíces del denominador complejas y diferentes

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{A}{s+6} + \frac{Bs+C}{s^2+6s+25} = \\ &= \frac{A(s^2+6s+25) + (Bs+C)(s+6)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \\ &= \frac{(A+B)s^2 + (6A+6B+C)s + 25A+6C}{(s+6)(s^2+6s+25)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 6A+6B+C=100 \\ 25A+6C=300 \end{cases} \\ &\Rightarrow \{A=-12, B=12, C=100\} \Rightarrow F(s) = \frac{-12}{s+6} + \frac{12s+100}{s^2+6s+25} \end{aligned}$$

$$\frac{12s+100}{s^2+6s+25} = 12 \frac{s+8,33}{(s+3)^2+4^2} = 12 \frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} + 16 \frac{4}{(s+3)^2+4^2}$$

$$f(t) = u(t) \left(-12e^{-6t} + 12e^{-3t} \cos 4t + 16e^{-3t} \sin 4t \right)$$

Transformada inversa de Laplace (cont)

d) Raíces del denominador complejas y repetidas

$$\frac{768}{(s^2 + 6s + 25)^2} = \frac{A}{(s + 3 - 4j)^2} + \frac{A^*}{(s + 3 + 4j)^2} + \frac{B}{s + 3 - 4j} + \frac{B^*}{s + 3 + 4j}$$

$$A = F(s)(s + 3 - 4j)^2|_{s=-3+4j} = \frac{768}{(s + 3 + 4j)^2}|_{s=-3+4j} = -12$$

$$A^* = -12$$

$$B = \frac{d}{ds} F(s)(s + 3 - 4j)^2|_{s=-3+4j} = \frac{d}{ds} \frac{738}{(s + 3 + 4j)^2}|_{s=-3+4j} = -3j$$

$$B^* = 3j$$

$$\frac{768}{(s^2 + 6s + 25)^2} = \frac{-12}{(s + 3 - 4j)^2} + \frac{-12}{(s + 3 + 4j)^2} + \frac{-3j}{s + 3 - 4j} + \frac{3j}{s + 3 + 4j}$$

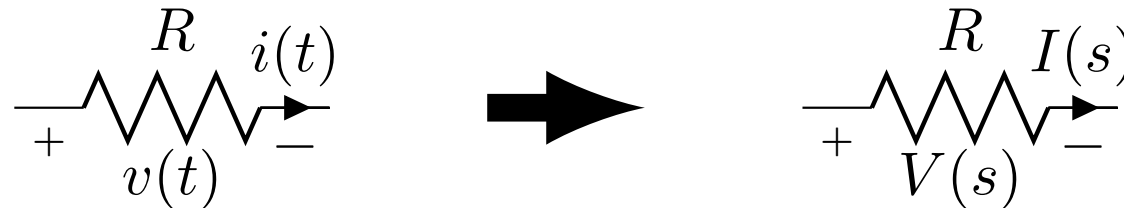
$$f(t) = -2 \cdot 12te^{-3t} \cos 4t + 2 \cdot 3e^{-3t} \cos 4t - 90$$

Transformada inversa de Laplace (cont)

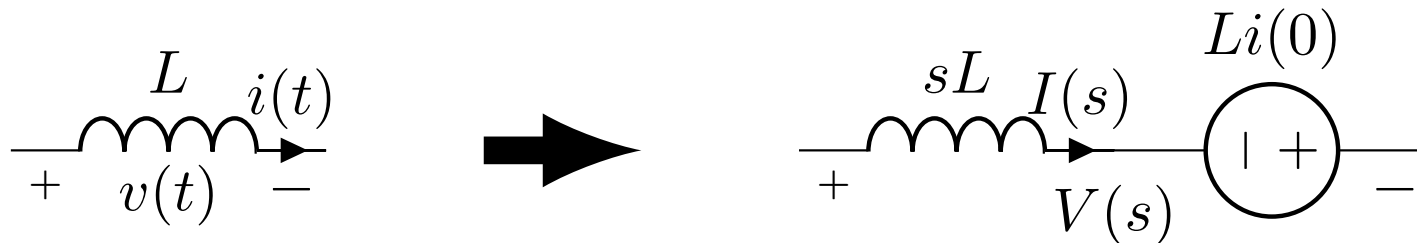
Raíces	$F(s)$	$f(t)$
Real simple	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
Real doble	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
Real múltiple	$\frac{K}{(s+a)^r}$	$\frac{Kt^{r-1}}{(r-1)!}e^{-at}u(t)$
Compleja simple	$\frac{ K \angle\theta}{s+\alpha-j\beta} + \frac{ K \angle-\theta}{s+\alpha+j\beta}$	$2 K e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$
Compleja doble	$\frac{ K \angle\theta}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{ K \angle-\theta}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t K e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$
Compleja múltiple	$\frac{ K \angle\theta}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{ K \angle-\theta}{(s+\alpha+j\beta)^r}$	$\frac{2 K t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$

Resistencia, bobina y condensador

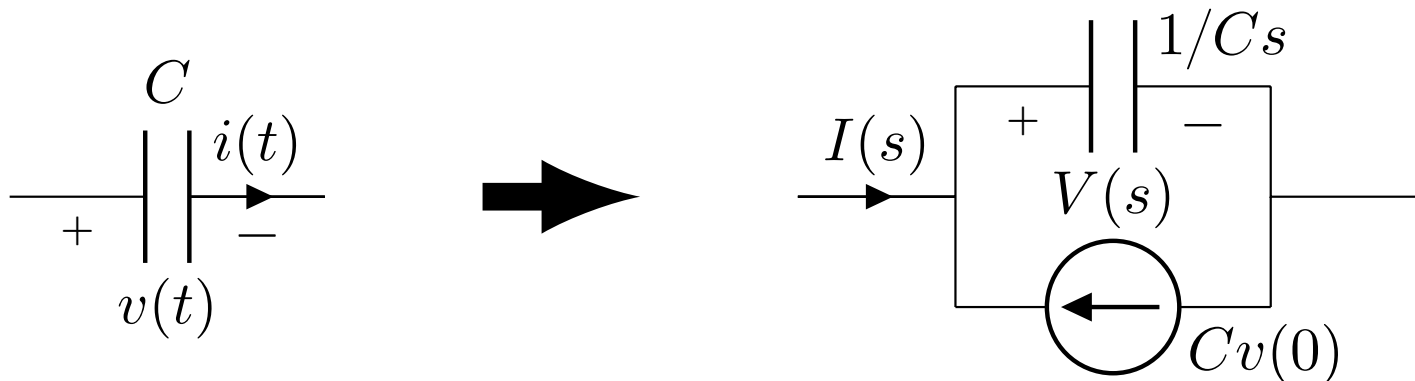
$$v(t) = R \cdot i(t) \implies \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}(R \cdot i(t)) \implies V(s) = R \cdot I(s)$$



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \implies \mathcal{L}(v(t)) = \mathcal{L}\left(L \frac{di(t)}{dt}\right) \implies V(s) = L(sI(s) - i(0))$$



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \implies \mathcal{L}(i(t)) = \mathcal{L}\left(C \frac{dv(t)}{dt}\right) \implies I(s) = C(sV(s) - v(0))$$

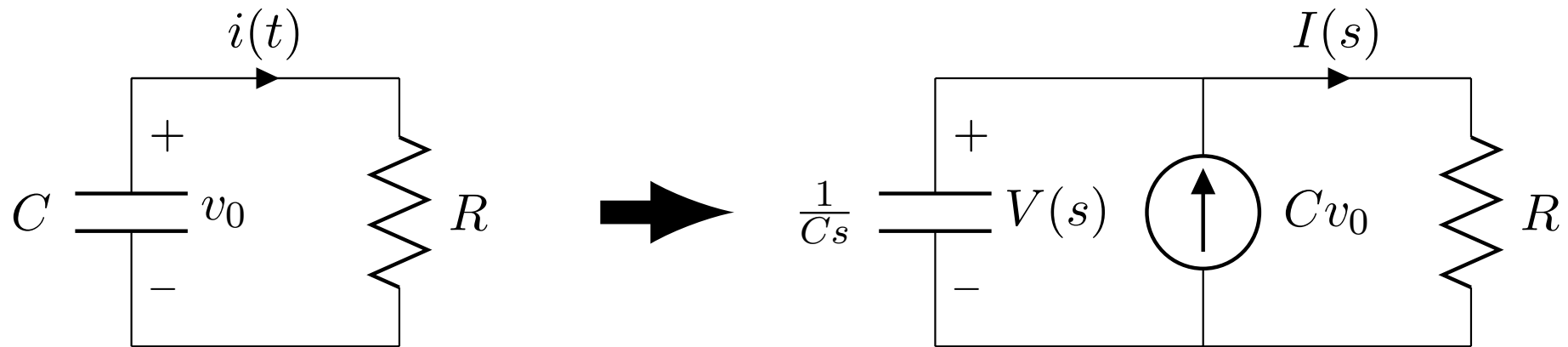


Análisis en el dominio de la frecuencia

- 1) Aplicamos la transformada de Laplace a las expresiones de las fuentes independientes
- 2) Hacemos la transformación de los elementos pasivos (resistencias, bobinas y condensadores)
- 3) Analizamos el circuito usando LKT, LKC, método de mallas o nudos
- 4) Aplicamos la transformada inversa de Laplace para obtener las respuestas en función del tiempo

Respuesta natural RC

Obtener la respuesta natural de un circuito RC

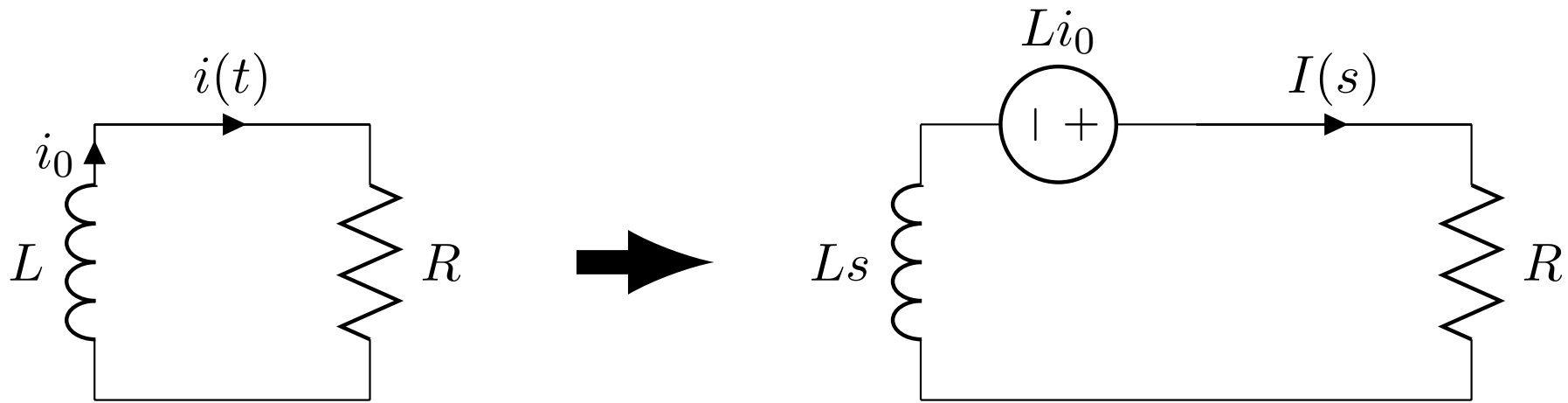


$$Cv_0 = CsV(s) + \frac{V(s)}{R} \implies V(s) = \frac{v_0}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Respuesta natural RL

Obtener la respuesta natural de un circuito RL

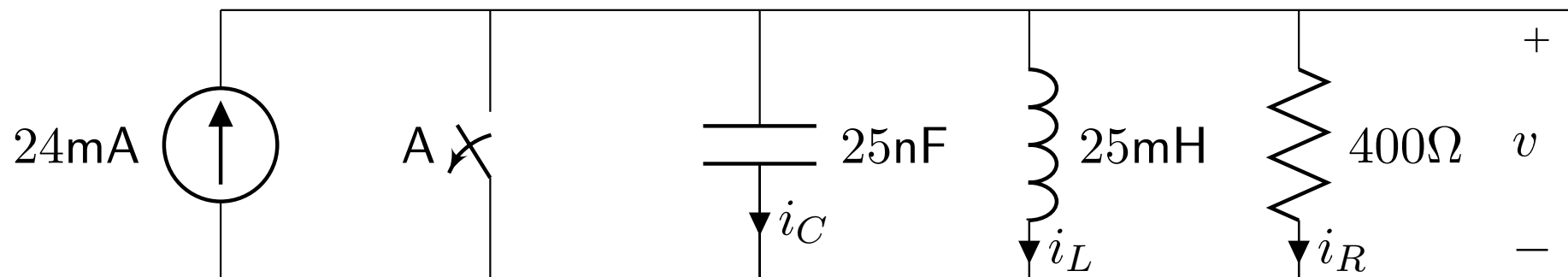


$$Li_0 = RI(s) + LsI(s) \implies I(s) = \frac{i_0}{s + \frac{R}{L}}$$

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

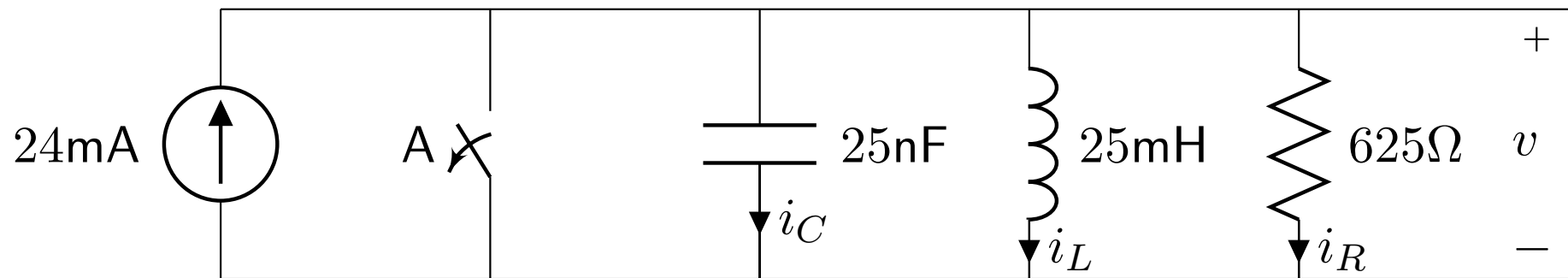
Ejercicio 3-1

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A. Determina $i_L(t)$, $t \geq 0$ usando la transformada de Laplace



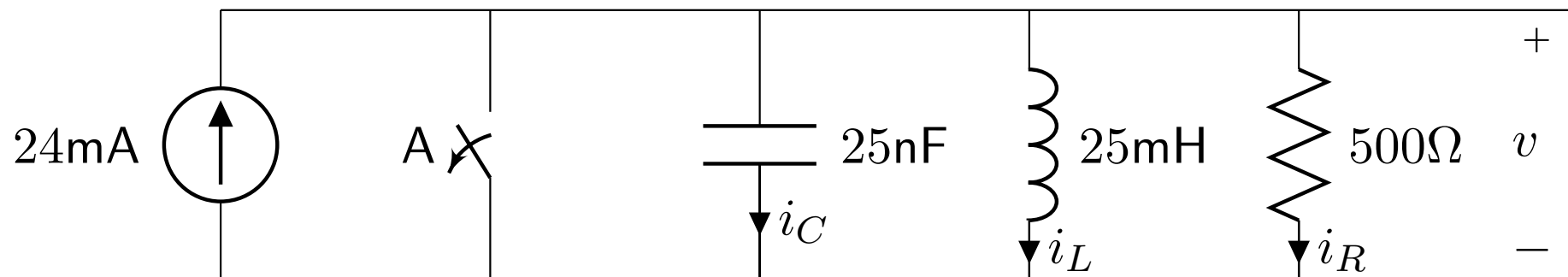
Ejercicio 3-2

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A. Determina $i_L(t)$, $t \geq 0$ usando la transformada de Laplace



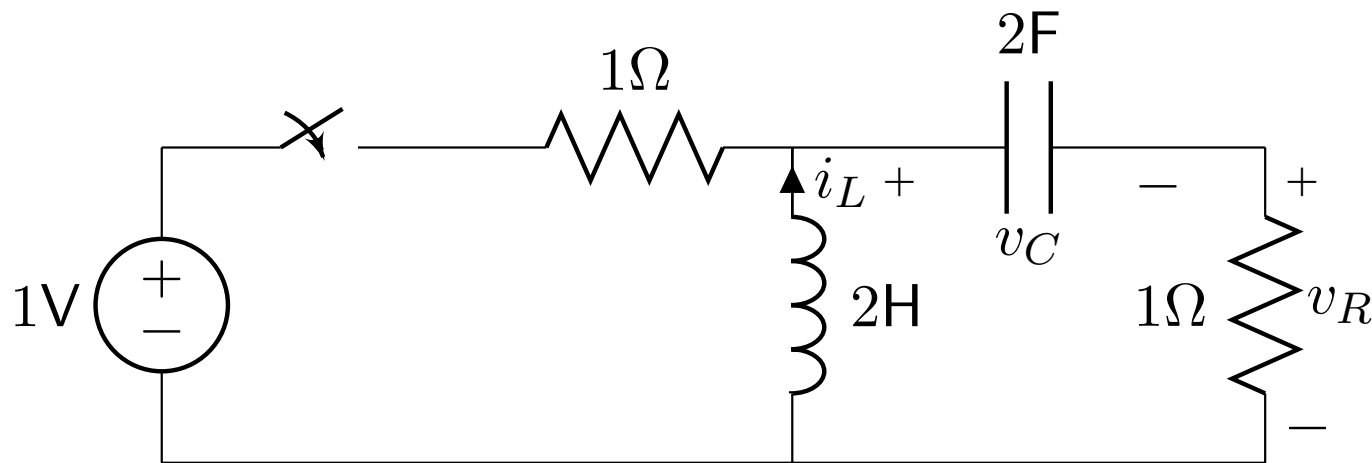
Ejercicio 3-3

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A. Determina $i_L(t)$, $t \geq 0$ usando la transformada de Laplace



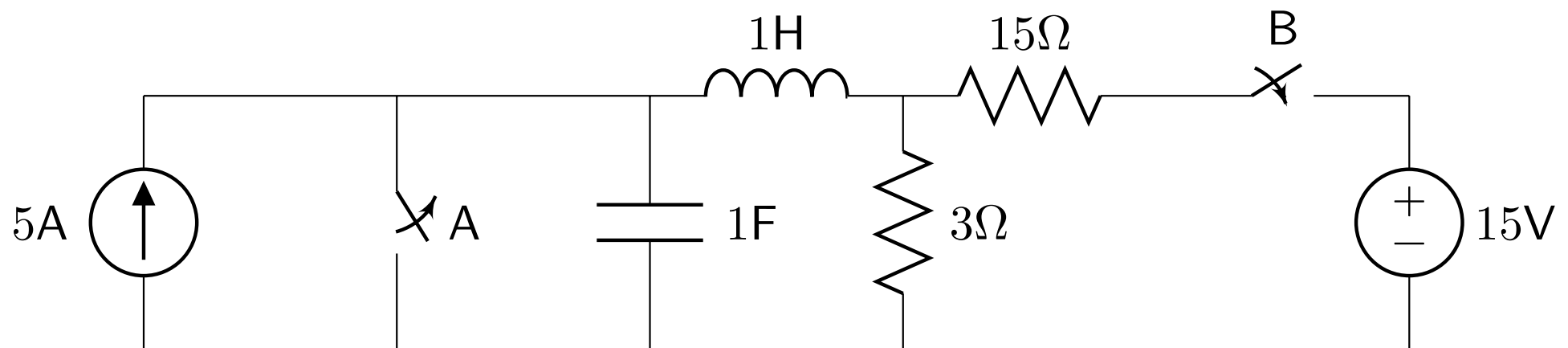
Ejercicio 3-4

En $t = 0$ se cierra el interruptor. Sabiendo que $i_L(t = 0^-) = 0,5\text{A}$ y $v_C(t = 0^-) = 1,5\text{V}$, calcula $v_R(t)$, $t \geq 0^+$ usando la transformada de Laplace



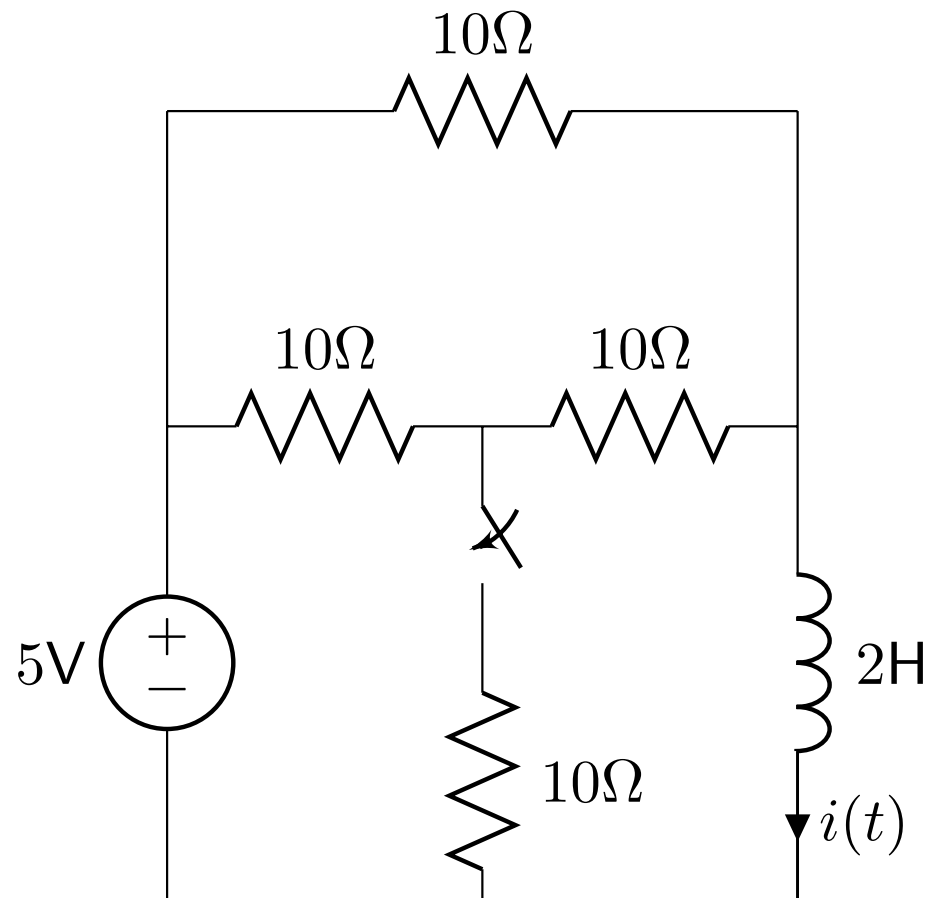
Ejercicio 3-5

La energía inicial del circuito es 0. En $t = 0$ se abre el interruptor A y se cierra el B. Determina $v_c(t)$, $t \geq 0$ usando la transformada de Laplace.



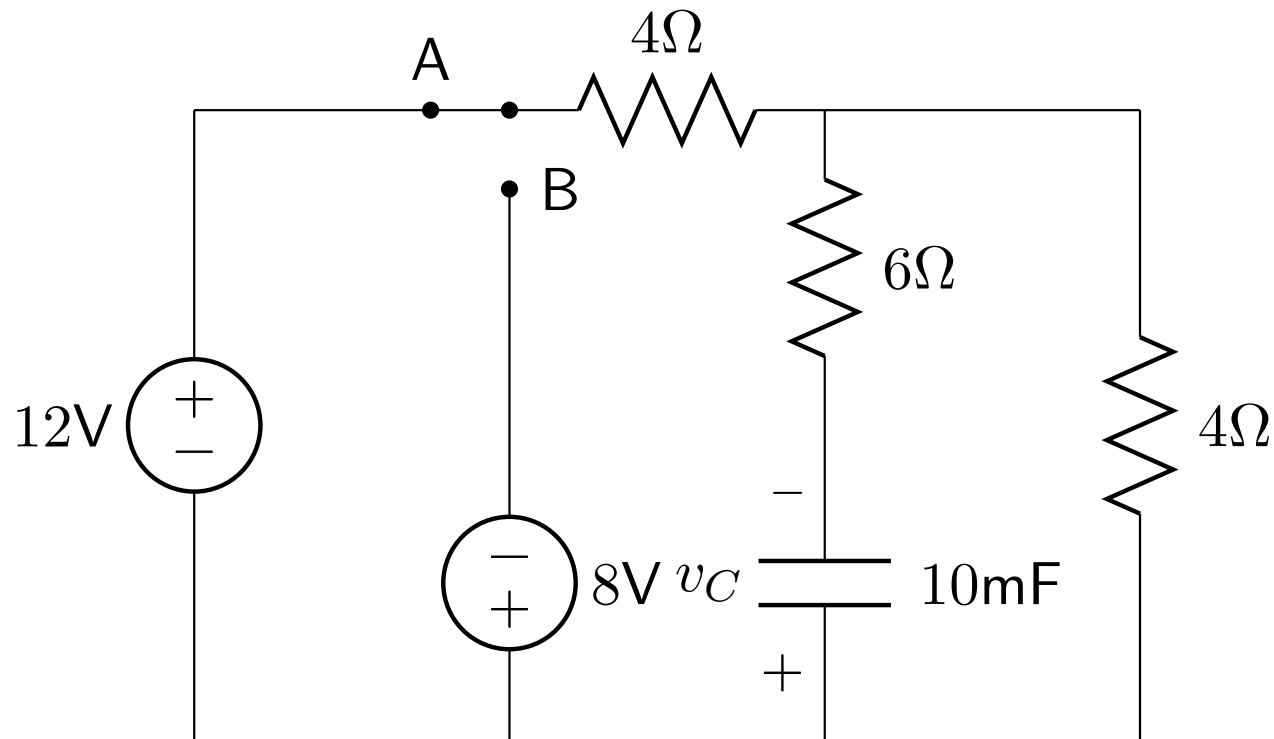
Ejercicio 3-6

El interruptor ha estado abierto un tiempo suficientemente largo y se cierra en $t = 0$. Calcula la expresión $i(t)$, $t \geq 0$ usando la transformada de Laplace.



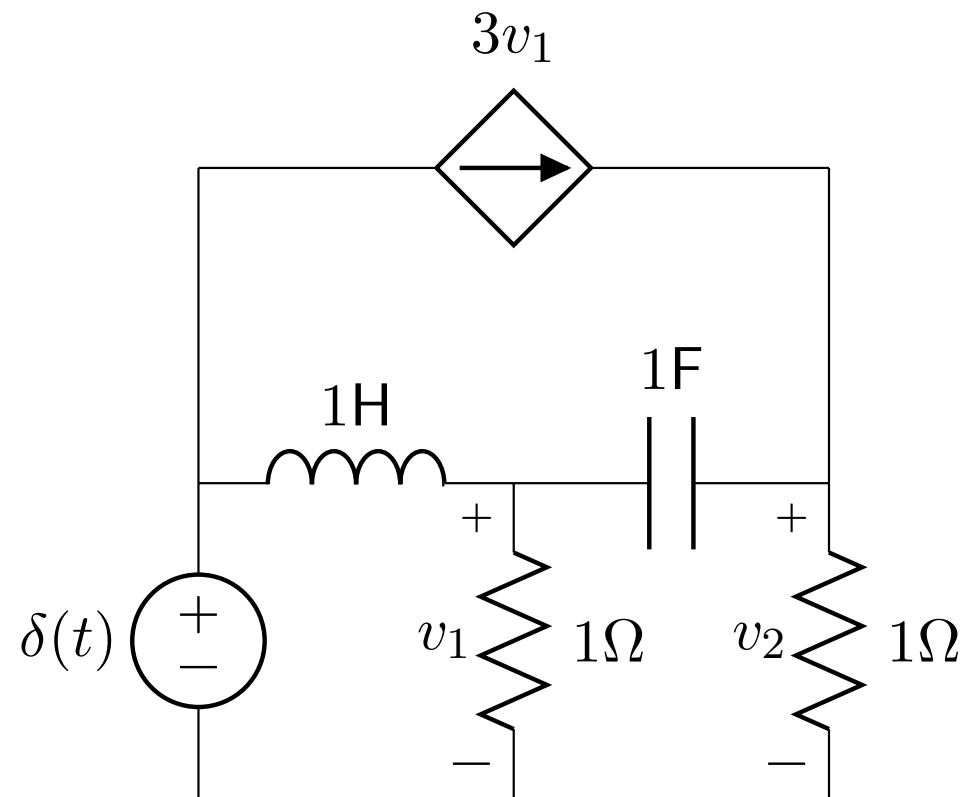
Ejercicio 3-7

El interruptor ha estado en la posición A un tiempo suficientemente largo. En $t = 0$ cambia a la posición B. Determine $v_c(t)$, $t \geq 0$ usando la transformada de Laplace.



Ejercicio 3-8

Determina $v_2(t)$, $t > 0$ usando la transformada de Laplace.



Ejercicio 3-9*

El circuito de la figura de la página 2 (izquierda) ha estado funcionando un tiempo suficientemente largo con el interruptor A cerrado y el interruptor B abierto. En $t = 0$ abrimos el interruptor A y cerramos el interruptor B. Calcula $v_c(t)$, $t \geq 0$.

