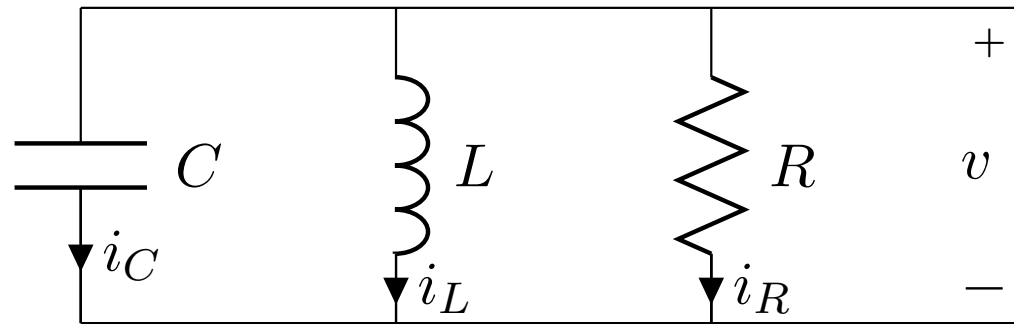


Análisis de Redes Eléctricas

Tema 2: Circuitos RLC de segundo orden

Respuesta natural RLC paralelo

Tenemos un condensador con una tensión inicial y una bobina con una intensidad inicial para $t = 0$. Calculamos la evolución de $v(t)$, $t \geq 0$.



$$i_C = C \frac{dv}{dt} \qquad i_L = i_L(t = 0) + \frac{1}{L} \int_0^t v dt \qquad i_R = \frac{v}{R}$$

$$i_C + i_L + i_R = 0 \implies C \frac{dv}{dt} + i_L(t = 0) + \frac{1}{L} \int_0^t v dt + \frac{v}{R} = 0$$

Obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden

Respuesta natural RLC paralelo (cont)

Para resolver la ecuación diferencial derivamos una vez con respecto a t , obteniendo la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Para resolverla calculamos las raíces de la ecuación característica

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \implies \begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{cases}$$

La respuesta natural del circuito RLC paralelo tiene la forma

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales.

Respuesta natural RLC paralelo (cont)

A veces estas raíces se expresan como

$$\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2RC} \text{ (frecuencia de Neper)} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (frecuencia de resonancia)} \end{cases}$$

En función de las raíces s_1 y s_2 tenemos tres tipos de respuestas:

- Sobreamortiguada: $\omega_0^2 < \alpha^2$, dos raíces reales y distintas

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- Subamortiguada: $\omega_0^2 > \alpha^2$, dos raíces complejas conjugadas

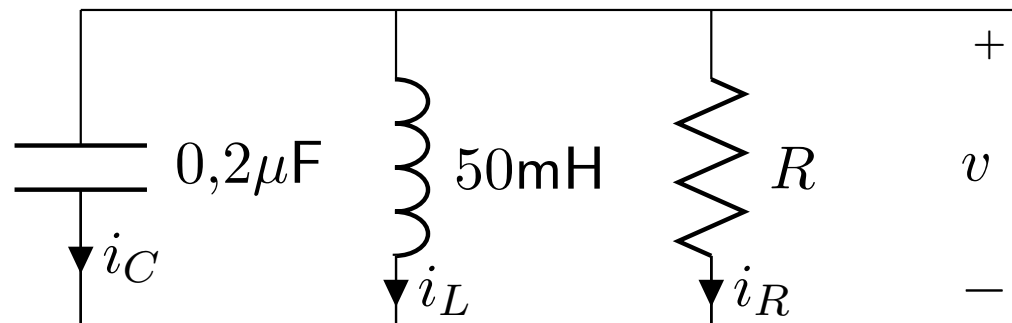
$$v(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad \text{donde} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

- Críticamente amortiguada: $\omega_0^2 = \alpha^2$, dos raíces reales e iguales

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t)$$

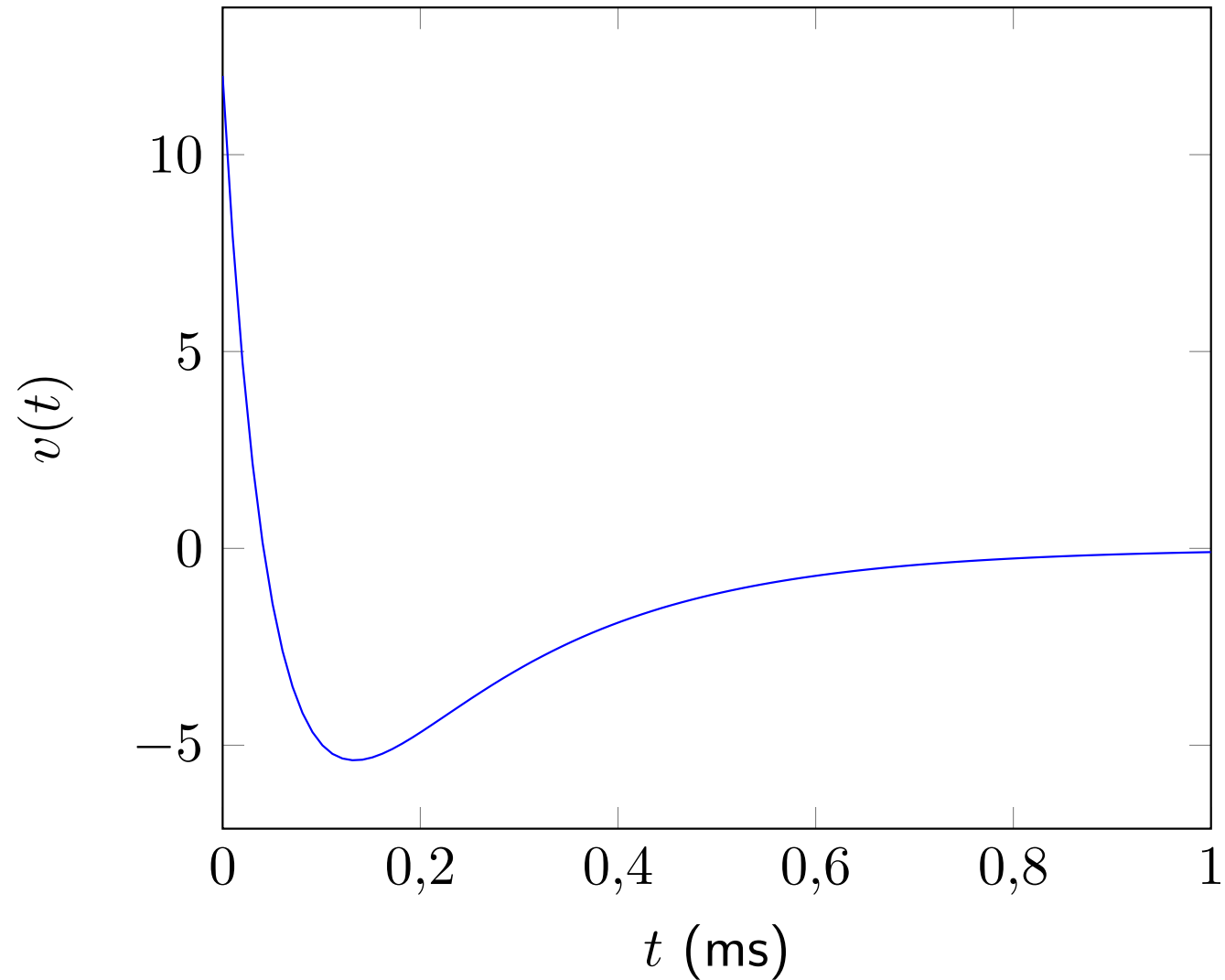
Ejercicio 2-1

Las condiciones iniciales del circuito son $v(0^+) = 12\text{V}$, $i_L(0^+) = 30\text{mA}$.
Determina la corriente inicial en cada rama, el valor inicial de $\frac{dv}{dt}$, las raíces, el tipo de respuesta, y la expresión de $v(t)$ para $R = 200\Omega$



Solución 2-1

$$v(t) = -14e^{-5000t} + 26e^{-20000t}$$

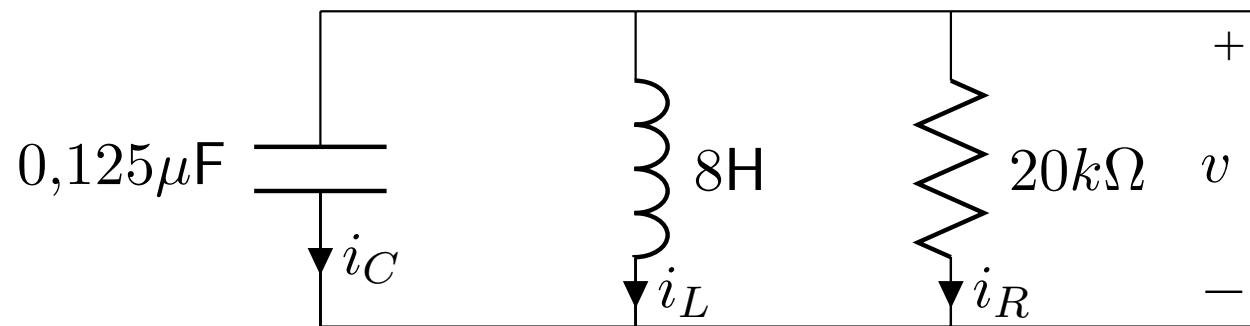


Respuesta sobrearmortiguada

Ejercicio 2-2

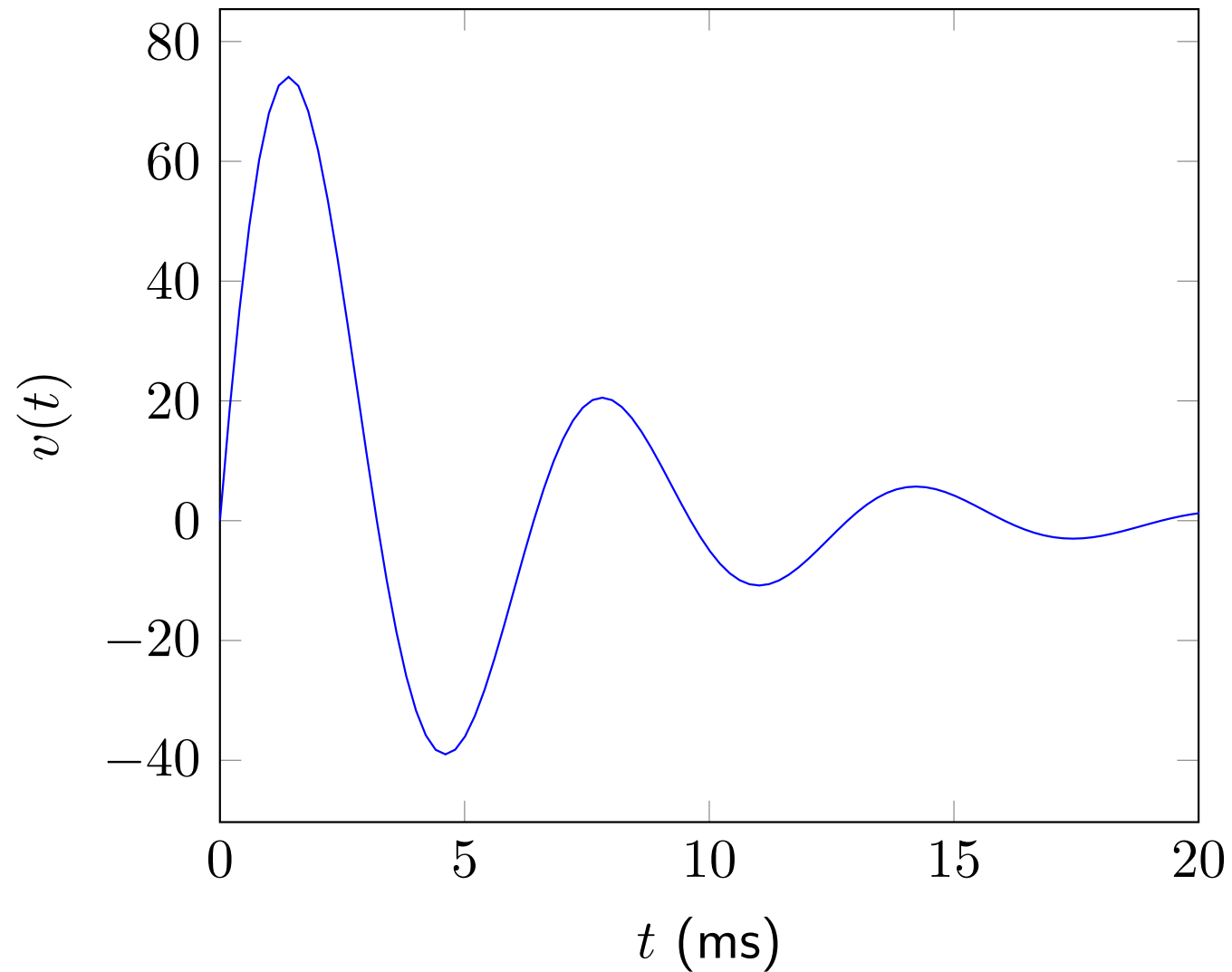
Para el circuito de la figura determina

- a) Las raíces y el tipo de respuesta
- b) La corriente inicial en cada rama y el valor inicial de $\frac{dv}{dt}$ para $v(0^+) = 0V$ y $i_L(0^+) = -12,25mA$
- c) La expresión $v(t)$



Solución 2-2

$$v(t) = 100e^{-200t} \sin 979,79t$$

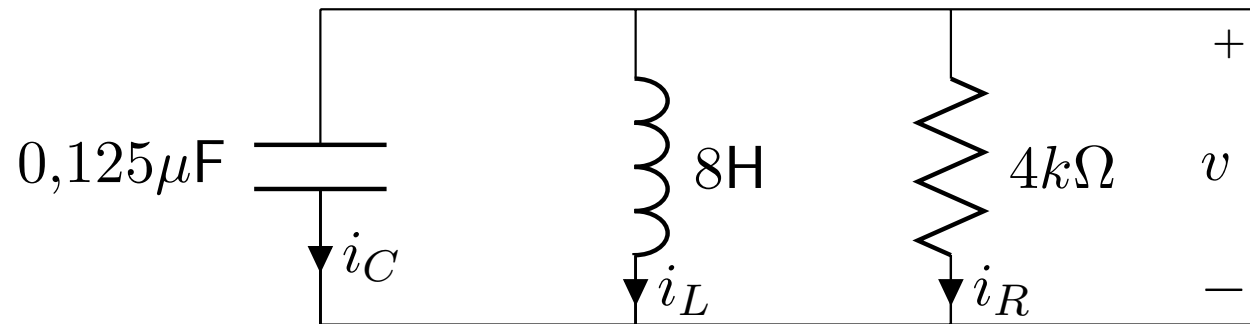


Respuesta subamortiguada

Ejercicio 2-3

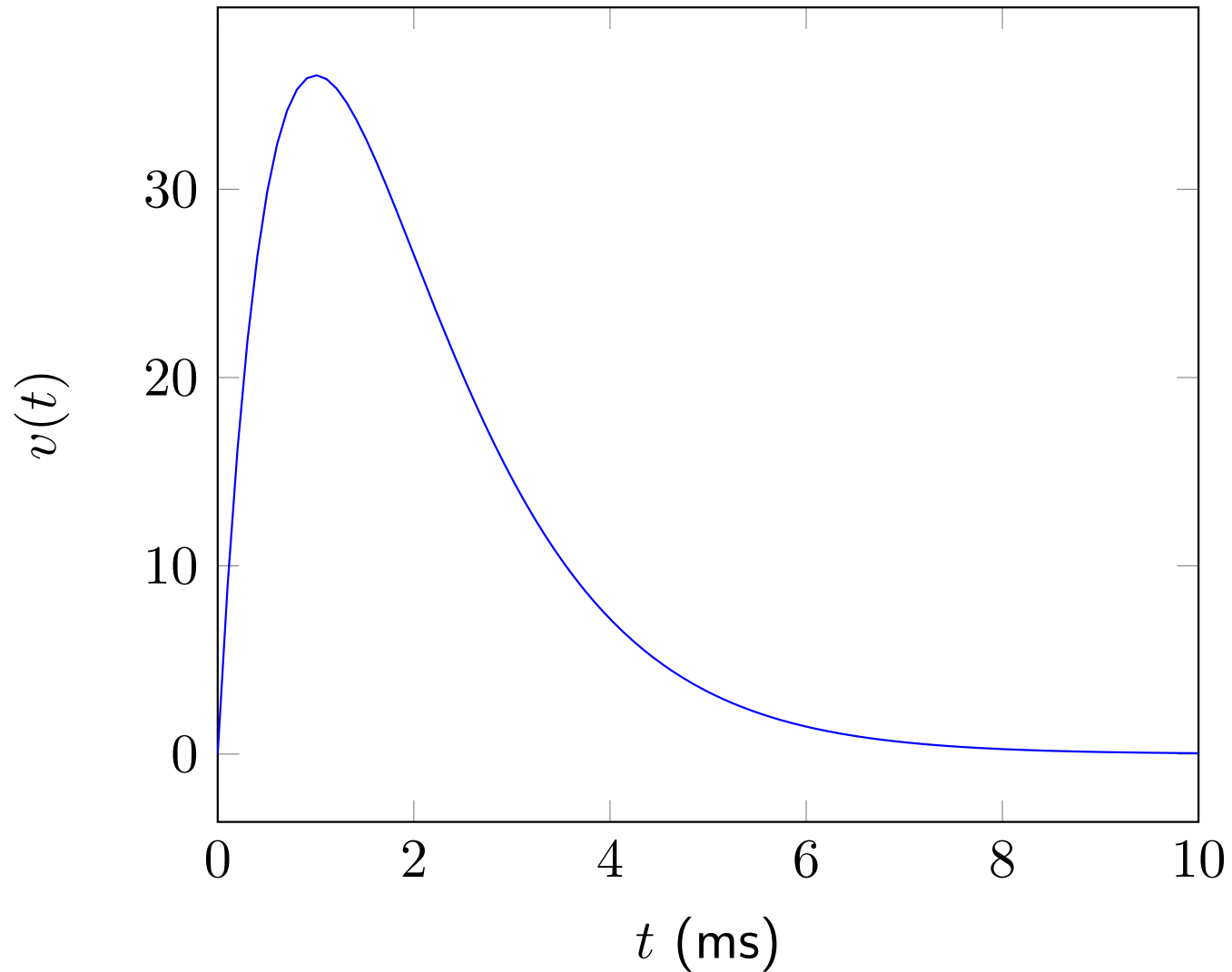
Para el circuito de la figura determina

- a) Las raíces y el tipo de respuesta
- b) La corriente inicial en cada rama y el valor inicial de $\frac{dv}{dt}$ para $v(0^+) = 0V$ y $i_L(0^+) = -12,25mA$
- c) La expresión $v(t)$



Solución 2-3

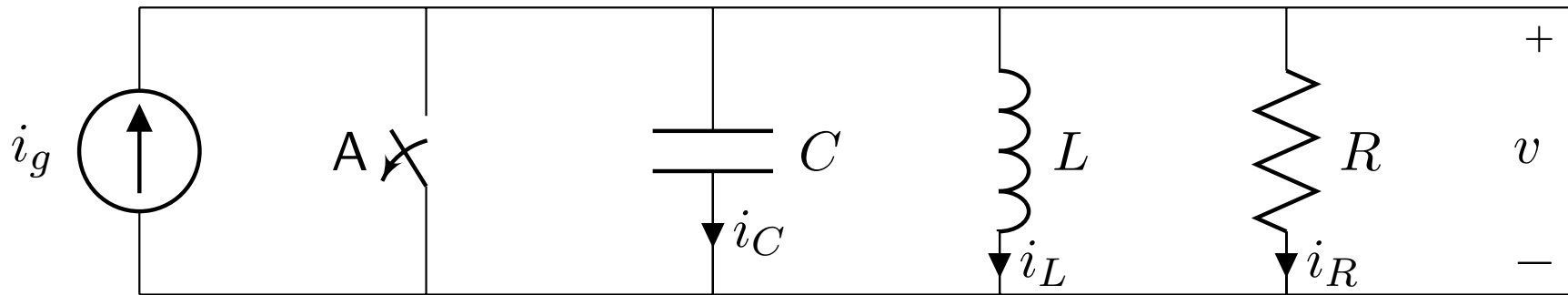
$$v(t) = 98000te^{-1000t}$$



Respuesta críticamente amortiguada

Respuesta escalón RLC paralelo

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A.



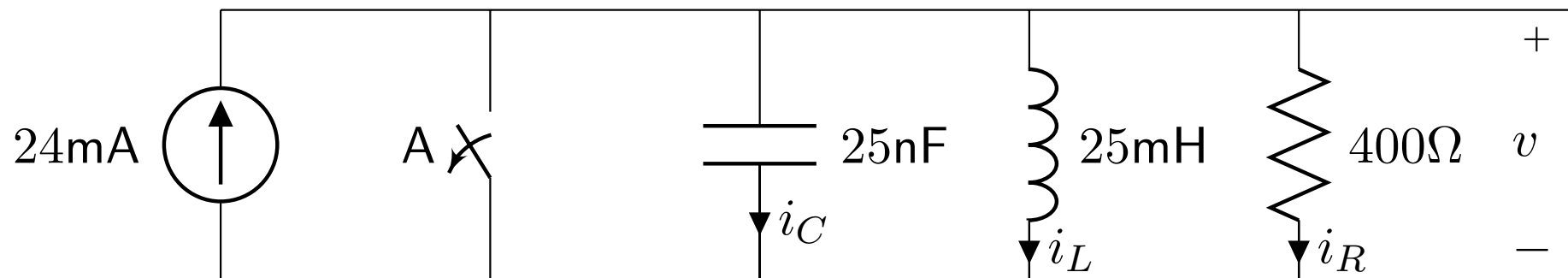
$$i_L + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = i_g \implies \left\{ v = L \frac{di}{dt} \right\}$$
$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{i_g}{LC}$$

Obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden (no homogénea) muy similar a la correspondiente a la respuesta natural

Ejercicio 2-4

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A. Determina

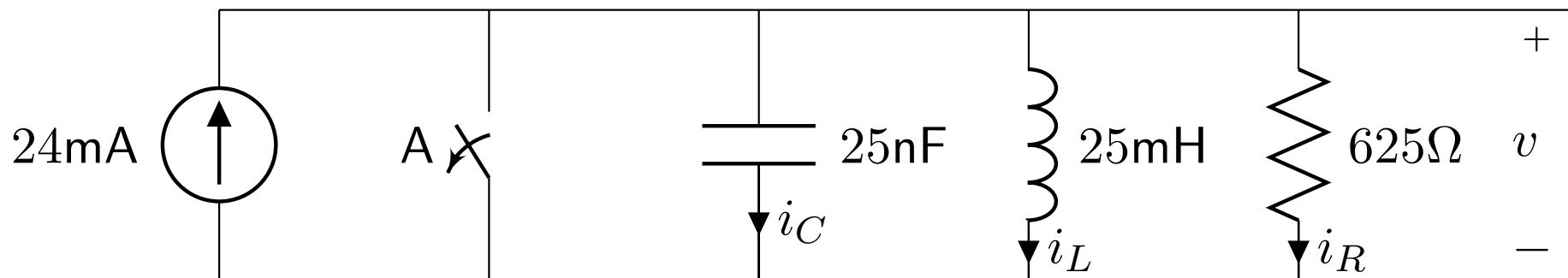
- a) $i_L(t = 0)$
- b) $\frac{di_L}{dt}(t = 0)$
- c) $i_L(t), t \geq 0$



Ejercicio 2-5

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A. Determina

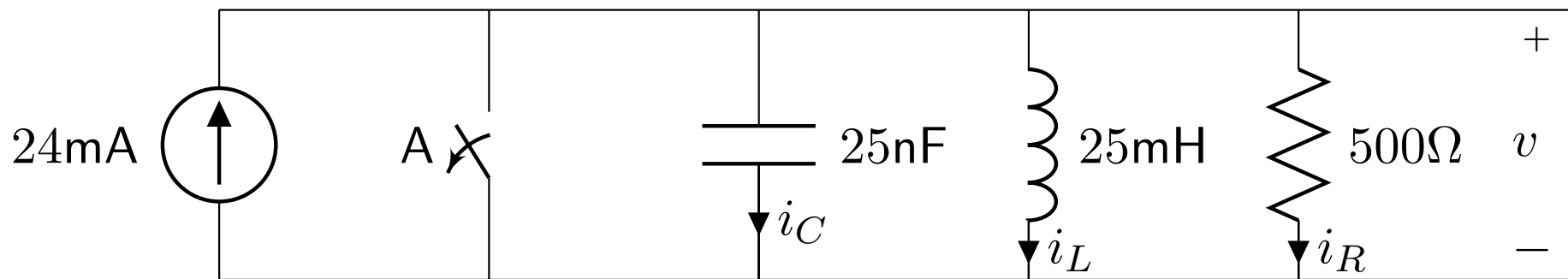
- a) $i_L(t = 0)$
- b) $\frac{di_L}{dt}(t = 0)$
- c) $i_L(t), t \geq 0$



Ejercicio 2-6

Le energía inicial del circuito es nula. En $t = 0$ se abre el interruptor A. Determina

- a) $i_L(t = 0)$
- b) $\frac{di_L}{dt}(t = 0)$
- c) $i_L(t), t \geq 0$



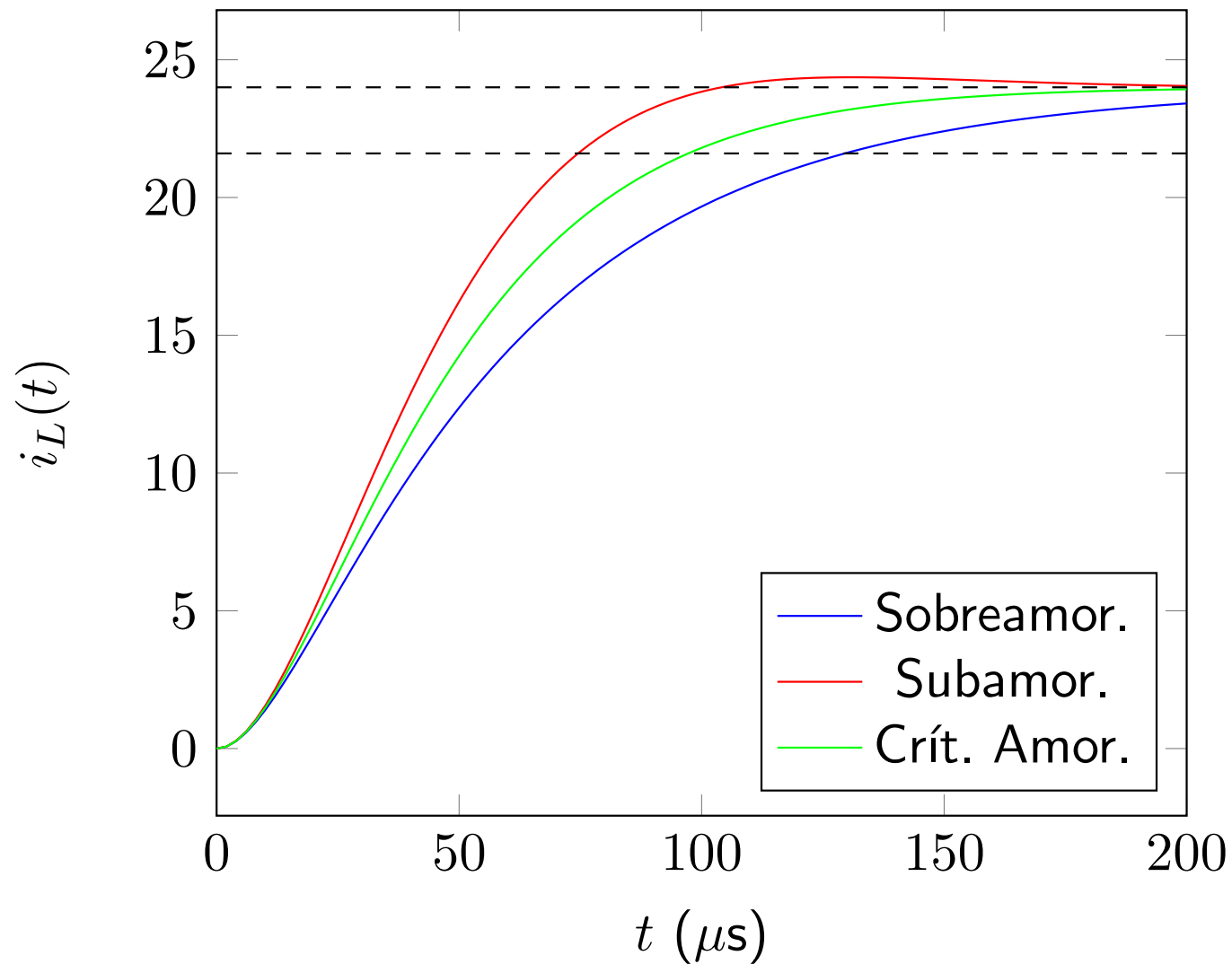
Ejercicio 2-7

Dibuja las respuestas de los ejercicios 2-4, 2-5 y 2-6 y contesta a las siguiente preguntas:

- a) Para cada una de ellas calcula el tiempo necesario para que la intensidad i_L alcance el 90 % de su valor final.
- b) ¿Qué diseño escogerías si fuera importante alcanzar el 90 % del valor final de salida en el tiempo más corto posible?
- c) ¿Qué diseño escogerías si fuera importante garantizar que el valor final de la corriente nunca sea excedido?

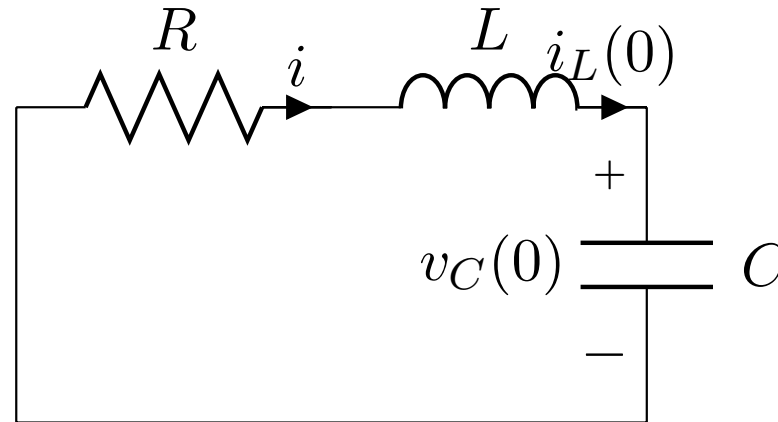
Solución 2-7

La respuesta de los ejercicios 2-4, 2-5 y 2-6 se representa a continuación



Respuesta natural RLC serie

Para unas condiciones iniciales $i_L(0)$ y $v_C(0)$, determina la expresión $i(t)$.



Aplicando la LKT obtenemos

$$Ri + L \frac{di}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0$$

Derivamos con respecto a t

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Ecuación diferencial homogénea de segundo orden

Respuesta natural RLC serie (cont)

La ecuación característica es

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Cuyas raíces son

$$\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{R}{2L} \text{ (frecuencia de Neper)} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (frecuencia de resonancia)} \end{cases}$$

En función de las raíces s_1 y s_2 tenemos tres tipos de respuestas:

- Sobreamortiguada: $\omega_0^2 < \alpha^2$, dos raíces reales y distintas

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- Subamortiguada: $\omega_0^2 > \alpha^2$, dos raíces complejas conjugadas

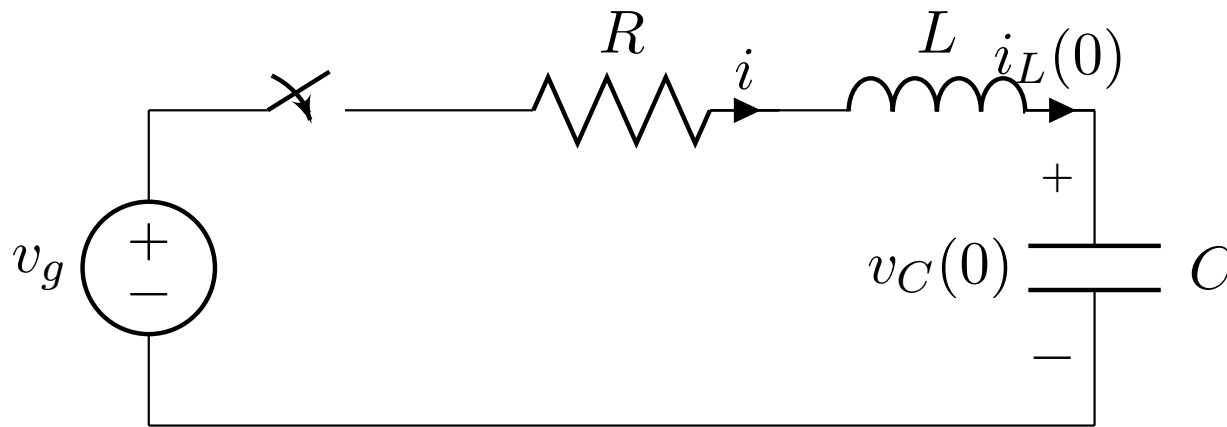
$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad \text{donde} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

- Críticamente amortiguada: $\omega_0^2 = \alpha^2$, dos raíces reales e iguales

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t)$$

Respuesta escalón RLC serie

El interruptor se cierra en $t = 0$. Para unas condiciones iniciales $i_L(0)$ y $v_C(0)$ determina la expresión $i(t)$.



Aplicando la LKT obtenemos

$$Ri + L \frac{di}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = v_g \implies RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C(0) + v_C = v_g$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = \frac{v_g}{LC}$$

Ecuación diferencial homogénea de segundo orden

Ejercicio 2-8

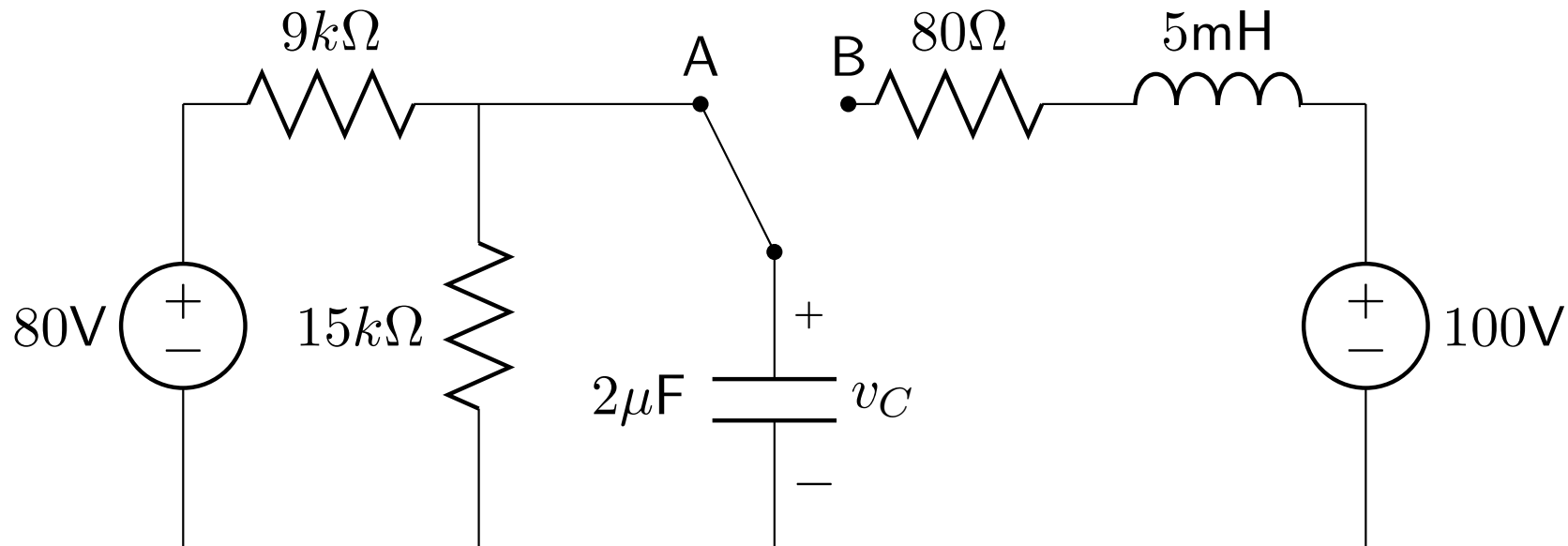
En interruptor ha estado en la posición A un tiempo suficientemente largo. En $t = 0$ cambia a posición B. Determina

a) $i(t = 0^+)$

b) $v_C(t = 0)$

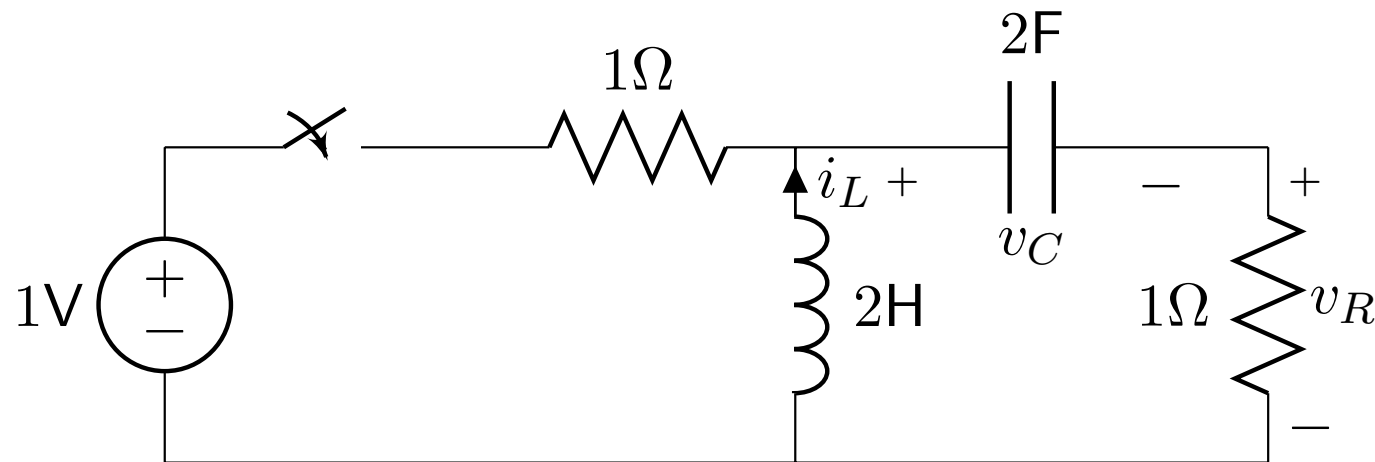
c) $\frac{di}{dt}(t = 0^+)$

d) $i(t), t \geq 0$



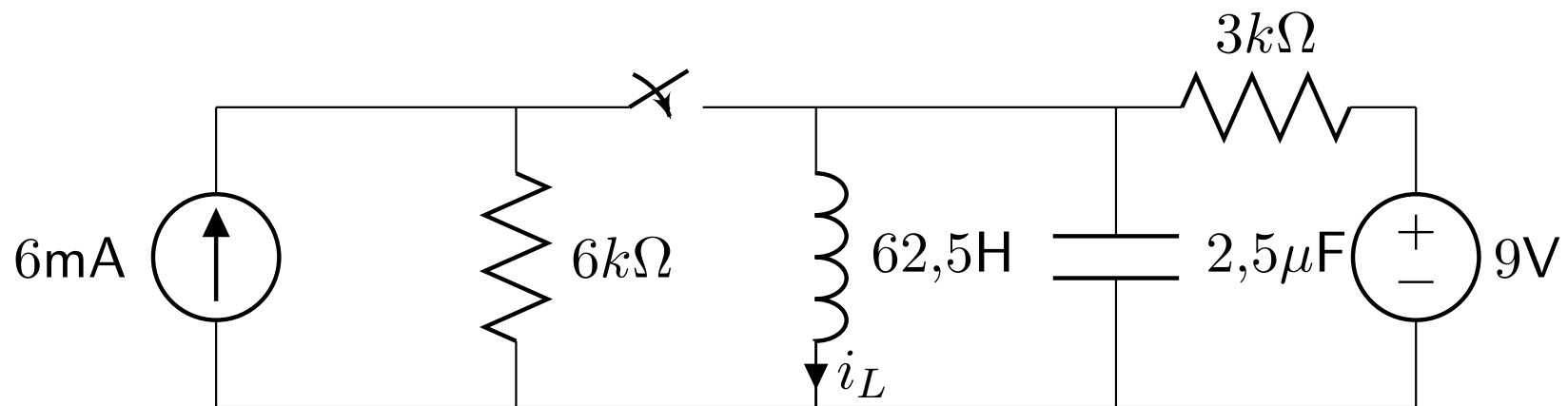
Ejercicio 2-9

En $t = 0$ se cierra el interruptor. Sabiendo que $i_L(t = 0^-) = 0,5\text{A}$ y $v_C(t = 0^-) = 1,5\text{V}$, calcula $v_R(t)$, $t \geq 0^+$



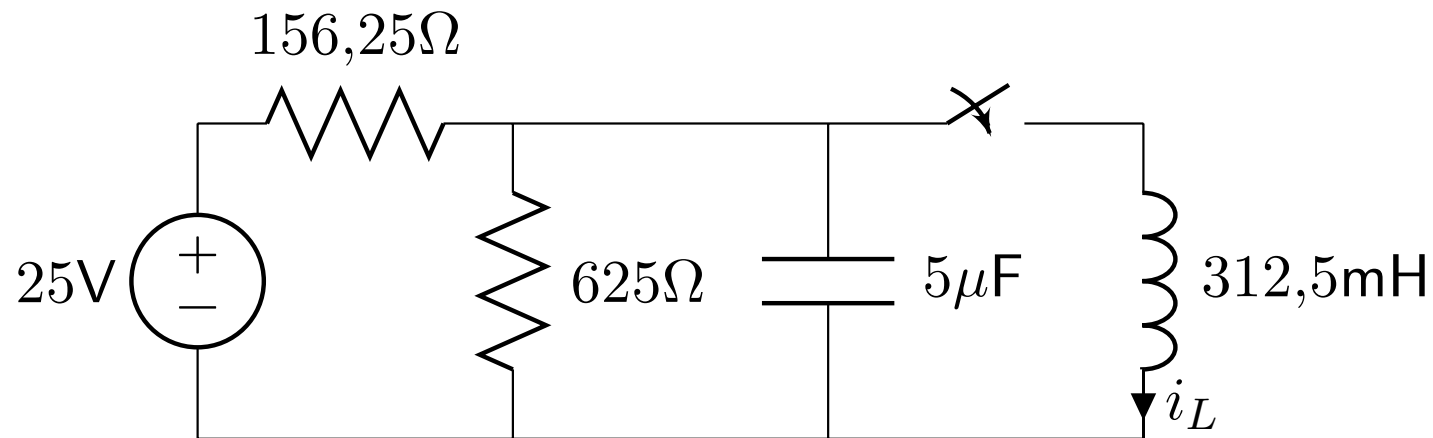
Ejercicio 2-10

El interruptor ha estado abierto un tiempo suficientemente largo y se cierra en $t = 0$. Calcula $i_L(t)$, $t \geq 0$.



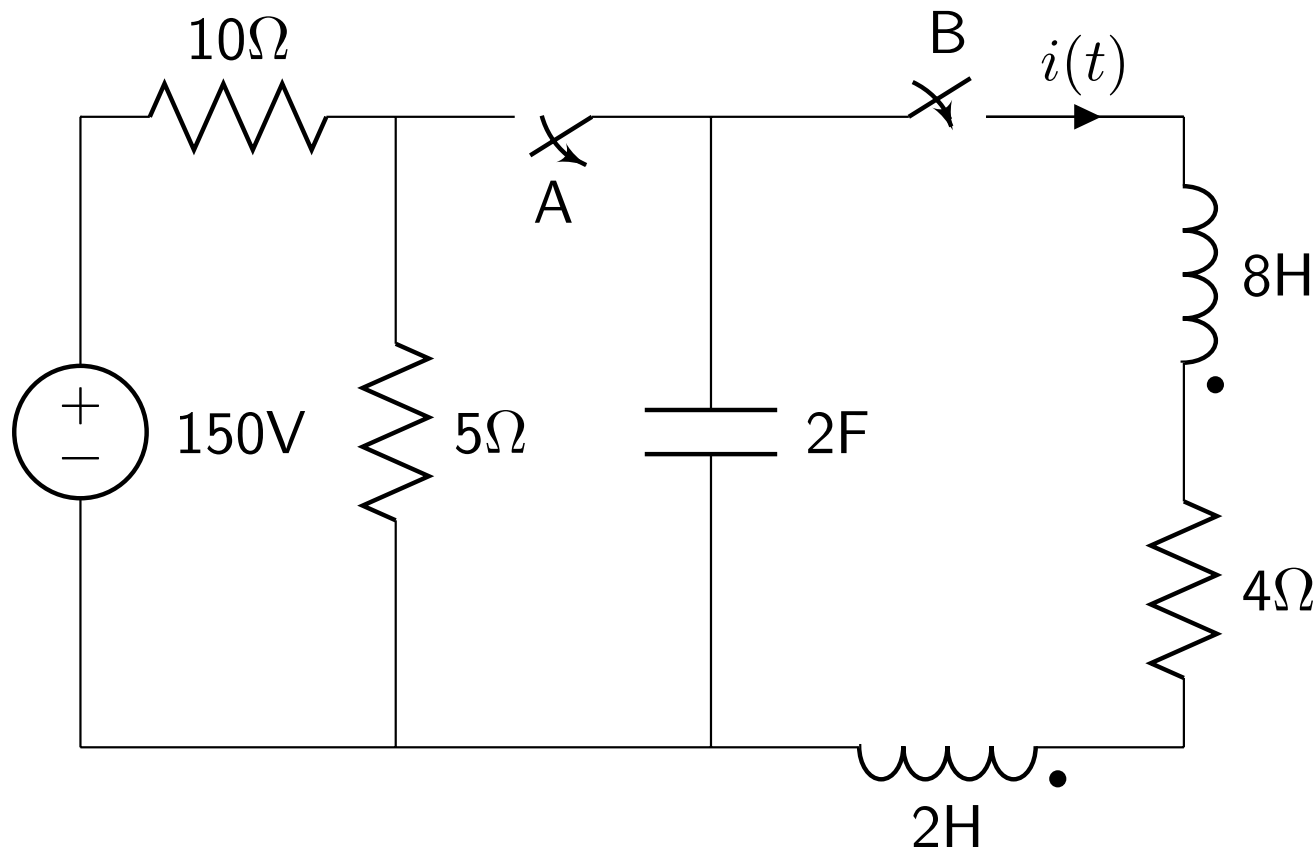
Ejercicio 2-11

El interruptor ha estado abierto un tiempo suficientemente largo y se cierra en $t = 0$. Calcula $i_L(t)$, $t \geq 0$.



Ejercicio 2-12

Durante un tiempo suficientemente largo el interruptor A ha estado cerrado y el interruptor B abierto. En $t = 0$ se abre el interruptor A y se cierra el interruptor B. Para un coeficiente de acoplamiento de las bobinas igual a 0.8. Calcula $i(t)$ para $t > 0$.



Ejercicio 2-13

Durante un tiempo suficientemente largo el interruptor A ha estado cerrado y el interruptor B abierto. En $t = 0$ se abre el interruptor A y se cierra el interruptor B. Para un coeficiente de acoplamiento entre las bobinas de 4 H igual a 0.8 calcula la expresión $i(t)$ para $t > 0$. Si en $t = 2$ segundos se produce un cortocircuito entre los puntos C y D, calcula la intensidad inicial que atraviesa dicho cortocircuito.

