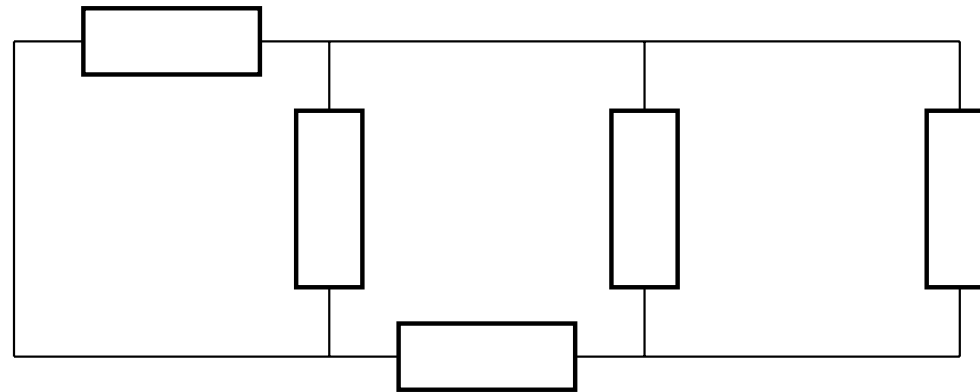


Análisis de Redes Eléctricas

Tema 0: Repaso

Circuito eléctrico

- Un circuito se puede definir como una serie de elementos conectados entre sí eléctricamente



- Nudo: punto de conexión de dos o más componentes
- Lazo: trayectoria cerrada que como máximo pasa una vez por cada nudo
- Malla: lazo que no contiene a ninguno otro en su interior

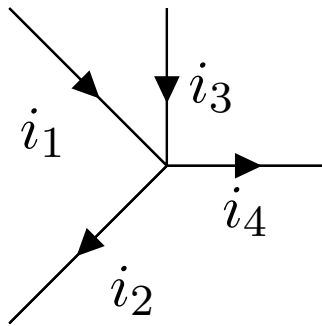
❓ ¿Cuántos nudos, lazos y mallas hay en el circuito?

Leyes de Kirchhoff

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887, Alemania)

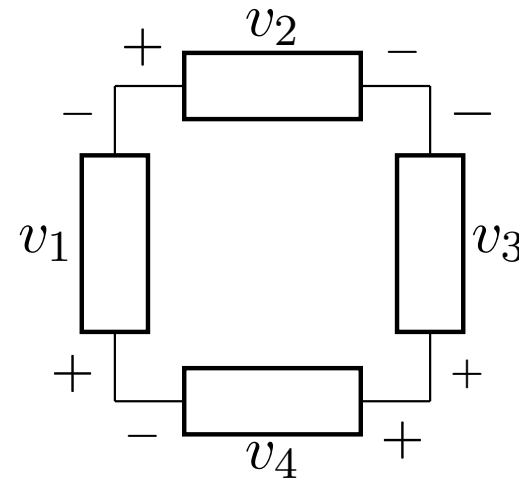


- Ley de Kirchhoff de corrientes (LKC): La suma de corrientes entrando a un nudo es igual a cero en todo instante



$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

- Ley de Kirchhoff de tensiones (LKT): La suma de las tensiones a lo largo de un lazo es igual a cero en todo instante



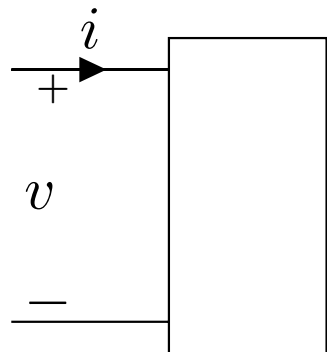
$$v_1 + v_2 - v_3 + v_4 = 0$$

Potencia y energía

- La potencia (P) mide la energía intercambiada por unidad de tiempo
- La potencia se mide en Vatios (W). $1W = 1J/1s$

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = v \cdot i$$

- Criterio consumidor

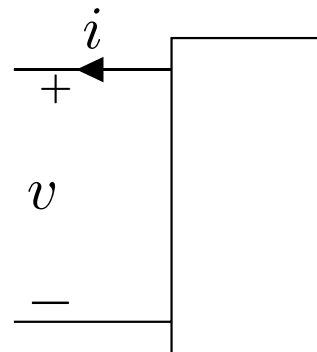


$$P = v \cdot i$$

$$P > 0 \rightarrow \text{consume}$$

$$P < 0 \rightarrow \text{genera}$$

- Criterio generador



$$P = v \cdot i$$

$$P > 0 \rightarrow \text{genera}$$

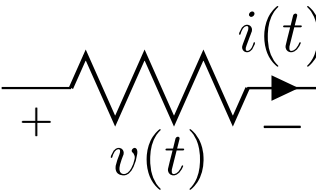
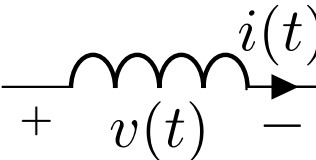
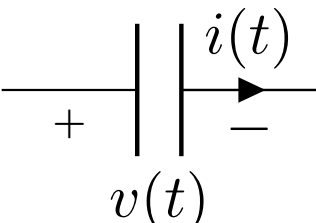
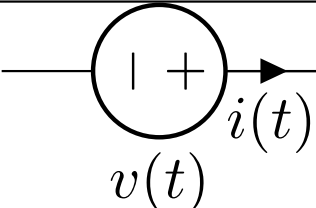
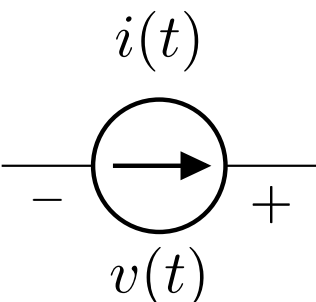
$$P < 0 \rightarrow \text{consume}$$

- La energía intercambiada (w) hasta el tiempo t se calcula como

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx$$

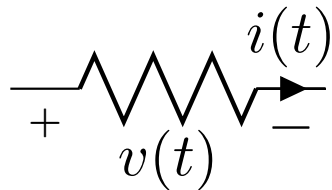
- La energía se puede medir en Julios (J) o kWh

Elementos básicos

Resistencia (R)		$v(t) = Ri(t)$
Bobina (L)		$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
Condensador (C)		$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
Fuente tensión		$v(t)$ conocida $i(t)$ incógnita
Fuente intensidad		$v(t)$ incógnita $i(t)$ conocida

Resistencia. Ley de Ohm

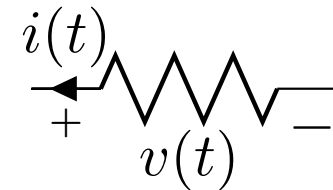
- La resistencia (R) se mide en Ohmios ($\Omega = V/A$)
- La conductancia (G) es la inversa de la resistencia ($G = 1/R$) y se mide en Siemens ($S = 1/\Omega$)
- La ley de Ohm depende del criterio!!!



$$v(t) = Ri(t) \quad i(t) = Gv(t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$



$$v(t) = -Ri(t) \quad i(t) = -Gv(t)$$

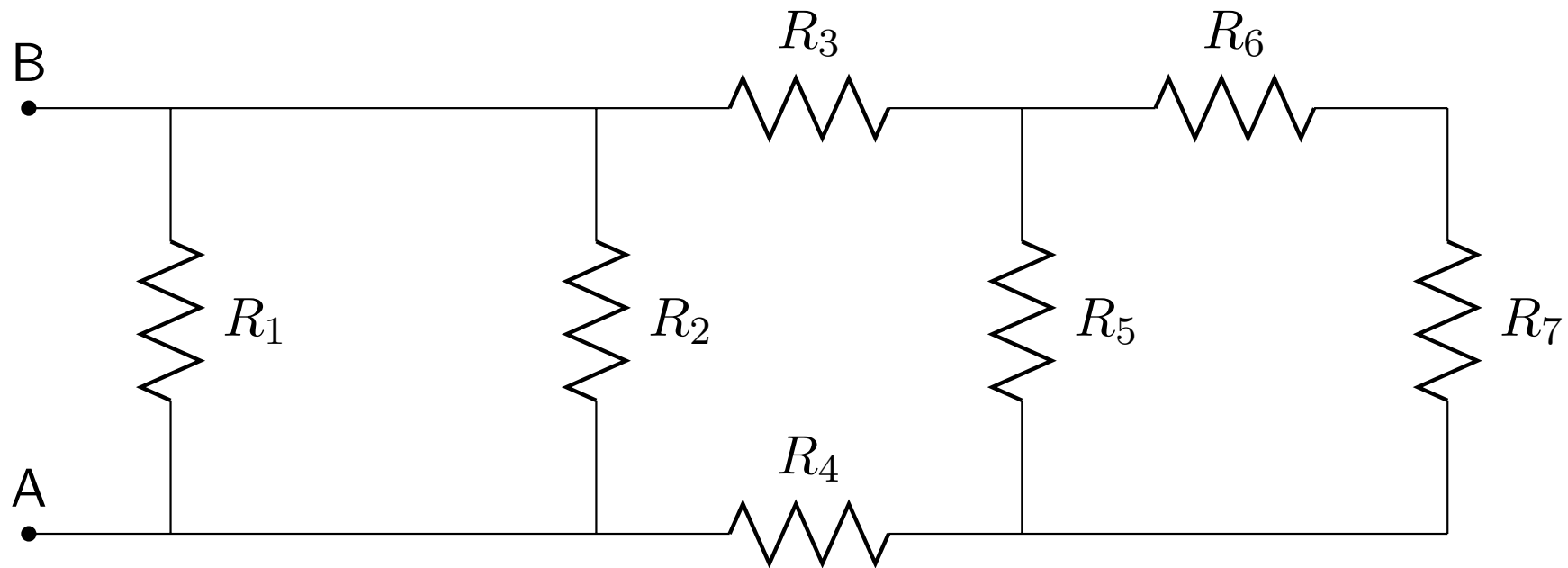
$$p(t) = v(t)i(t) = -Ri^2(t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = -\frac{v^2(t)}{R}$$

- Una resistencia siempre consume potencia (Efecto Joule)

❓ ¿Qué representa $R = \infty$? ¿Y $R = 0$?

Serie, paralelo y el más allá

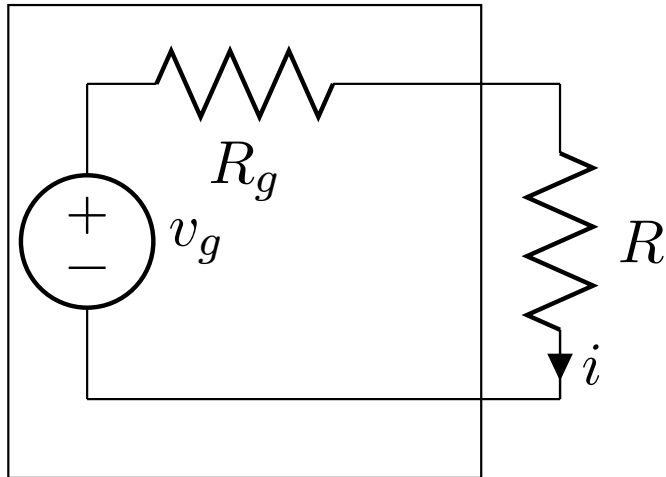


	Serie	Paralelo	Otro		Serie	Paralelo	Otro
R_2 y R_5				R_1 y R_2			
R_6 y R_7				R_3 y R_4			
R_4 y R_5				R_5 y R_7			
R_3 y R_6				R_1 y R_7			

Contesta en <https://goo.gl/Kpj5Va>

Máxima transferencia de potencia

¿Valor de R la potencia cedida por la fuente de tensión real sea máxima?



$$i = \frac{v_g}{R_g + R}$$

$$P = Ri^2 = R \left(\frac{v_g}{R_g + R} \right)^2$$

Calculamos el máximo de P derivando con respecto a R e igualando a 0

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \left(\frac{v_g}{R_g + R} \right)^2 + R \cdot 2 \left(\frac{v_g}{R_g + R} \right) \frac{-v_g}{(R_g + R)^2} = \frac{(R_g - R)v_g^2}{(R_g + R)^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \implies R = R_g$$

$$P^{\text{máx}} = R_g \left(\frac{v_g}{R_g + R_g} \right)^2 = \frac{v_g^2}{4R_g}$$

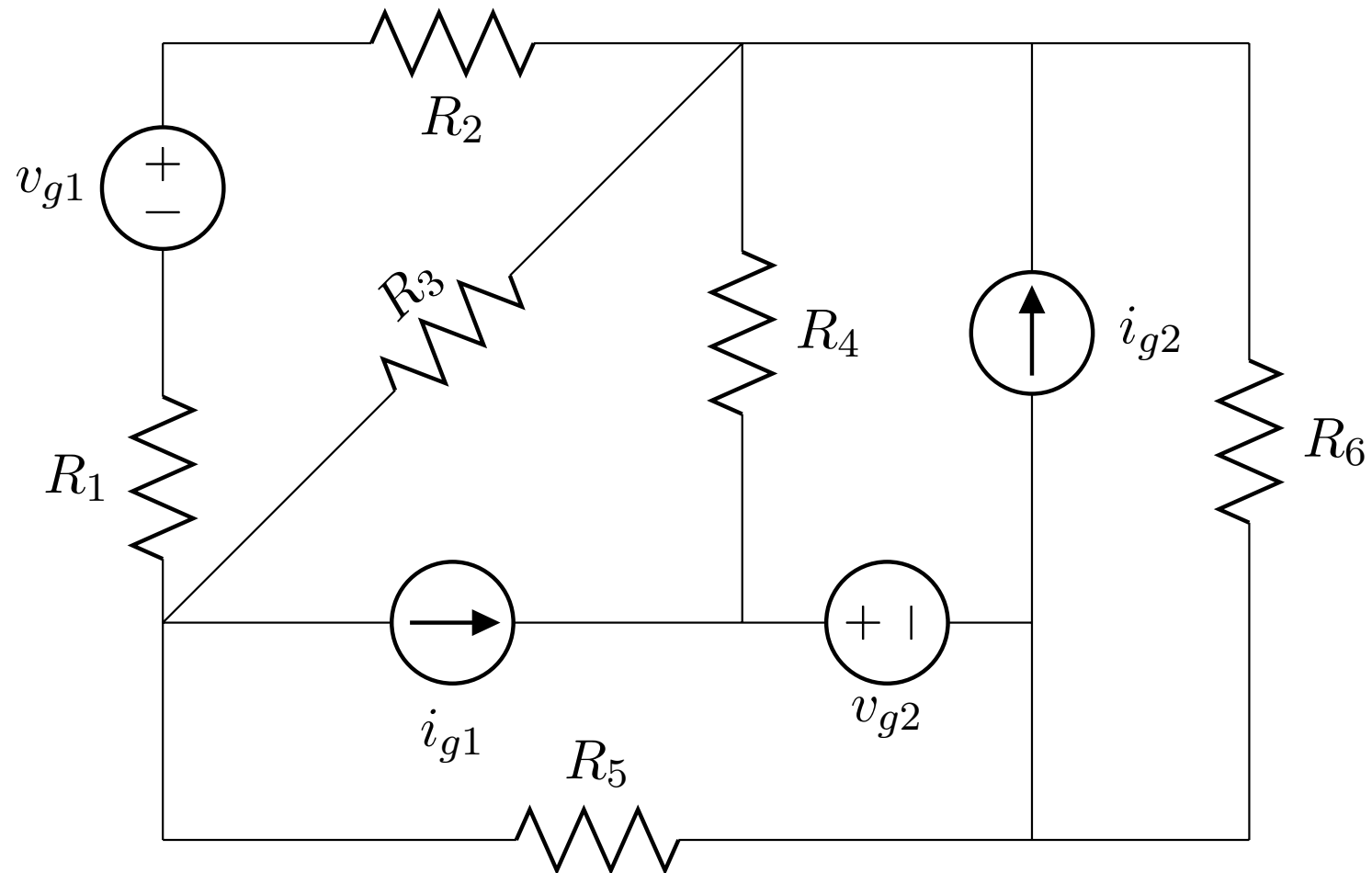
Método de mallas

- 1) Fuentes reales intensidad $\rightarrow$ fuentes reales tensión
- 2) Asignamos una corriente ficticia a cada malla
- 3) Calculamos la tensión de cada resistencia (Ley Ohm)
- 4) Aplicamos LKV a cada malla
- 5) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales (<https://goo.gl/HDYVSe>)

Método de nudos

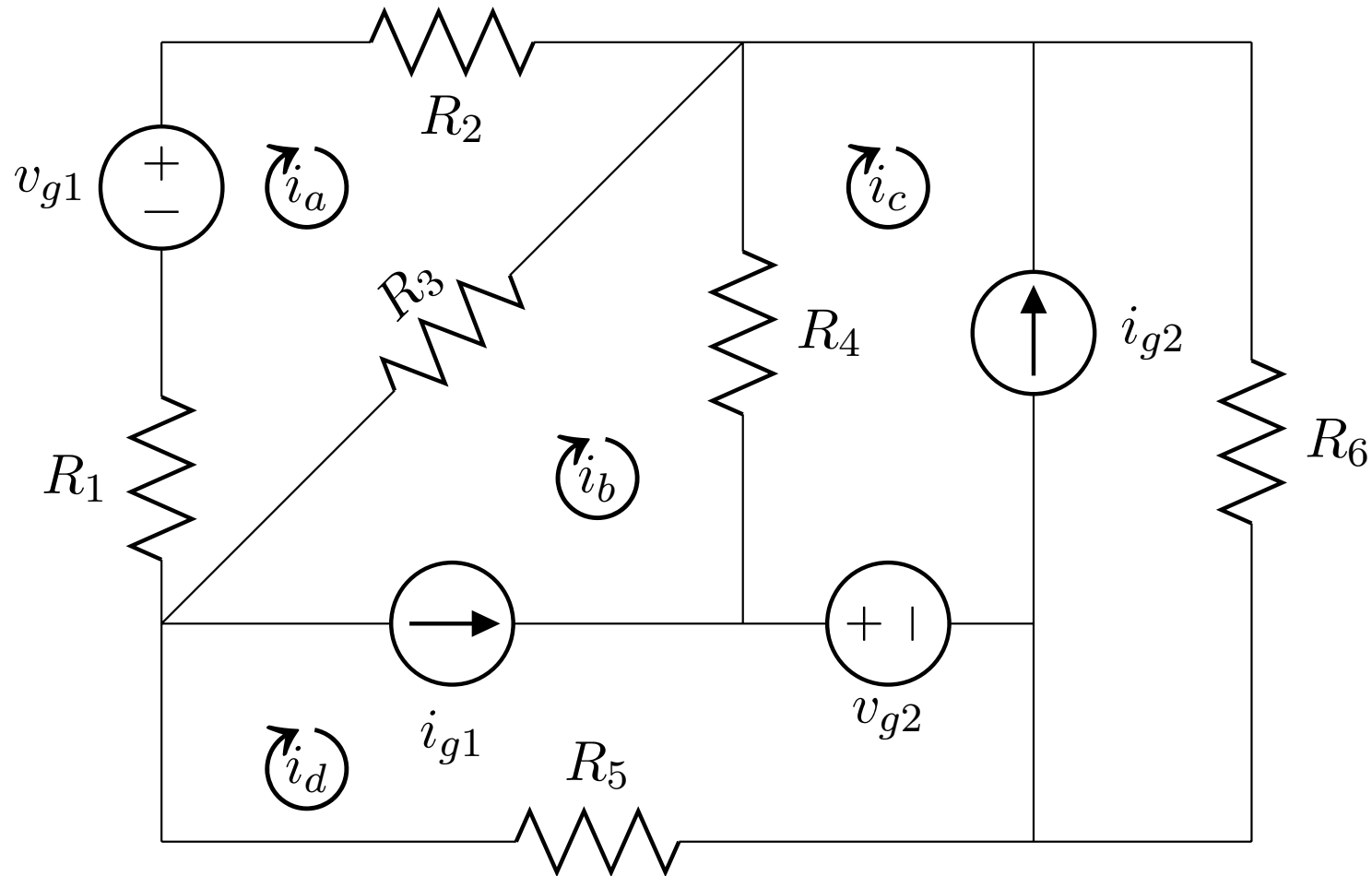
- 1) Fuentes reales tensión $\rightarrow$ fuentes reales intensidad
- 2) Arbitrariamente elegimos un nudo de referencia y asignamos $v_0 = 0V$
- 3) La tensión en el resto de nudos será con respecto al nudo de referencia
- 4) Calculamos la intensidad por las ramas sin fuentes (Ley Ohm)
- 5) Aplicamos LKI a todos los nudos excepto el de referencia
- 6) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales (<https://goo.gl/HDYVSe>)

¿Mallas o nudos?



¿Mallas o nudos? (cont)

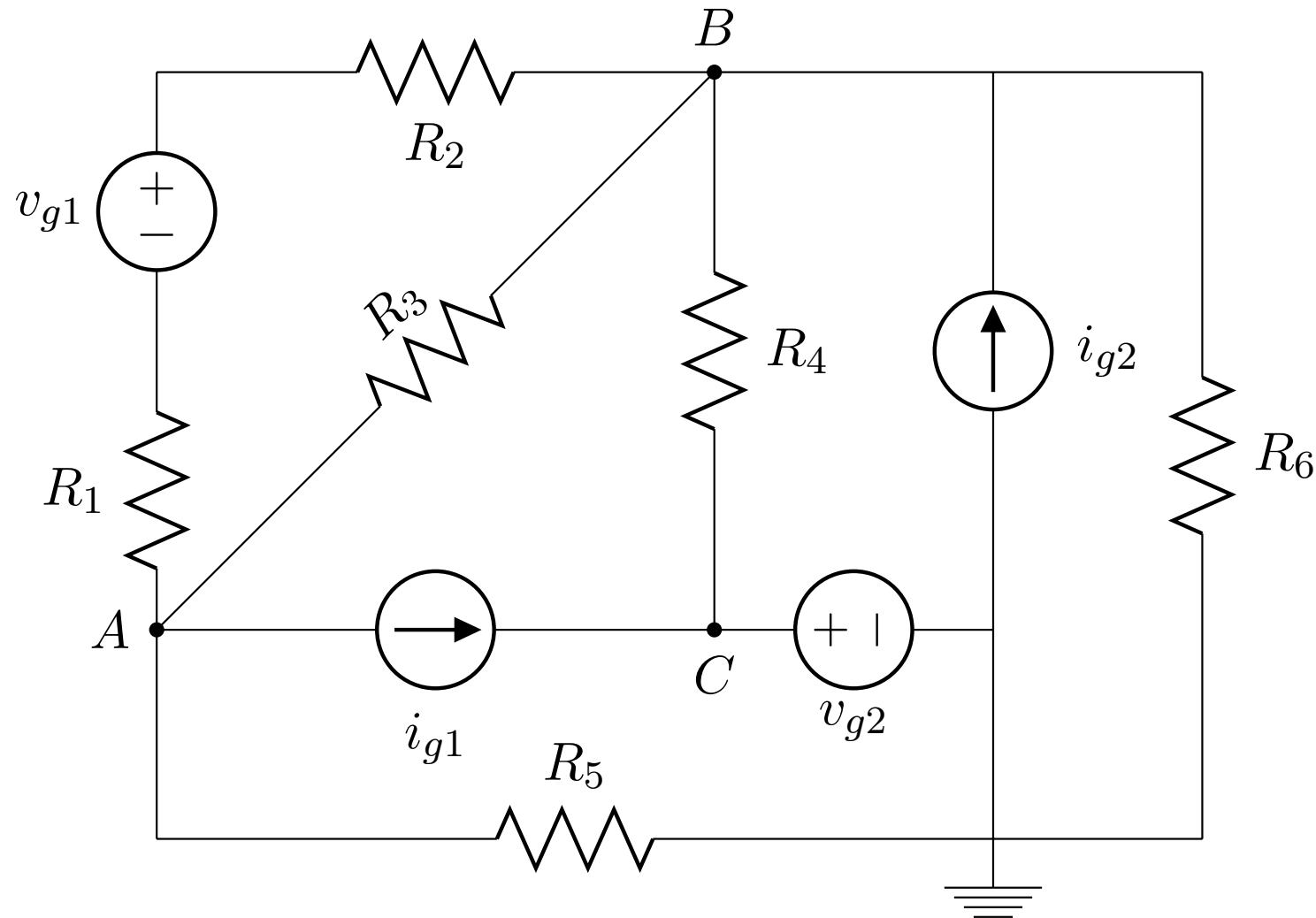
Aplicamos mallas



5 incógnitas ($i_a, i_b, i_c, i_d, v_{ig1}$) y 5 ecuaciones

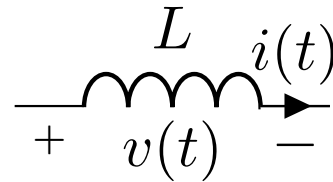
¿Mallas o nudos? (cont)

Aplicamos nudos



Como $v_C = v_{g2}$, 2 incógnitas (v_A, v_B) y 2 ecuaciones

Bobina



$L \rightarrow$ Coeficiente autoinducción (H)

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

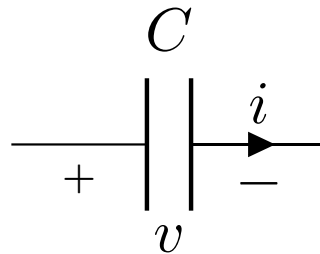
$$w(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt = \frac{1}{2} L (i^2(t) - i(t_0)^2)$$

$$i(t_0) = 0 \rightarrow w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

$i(t) = \text{cte} \rightarrow v(t) = 0 \rightarrow$ cortocircuito

$i(t)$ no puede cambiar de manera brusca

Condensador



$C \rightarrow$ Capacidad (F)

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$w(t) = \int_{t_0}^t p(t) dt = \frac{1}{2} C (v^2(t) - v(t_0)^2)$$

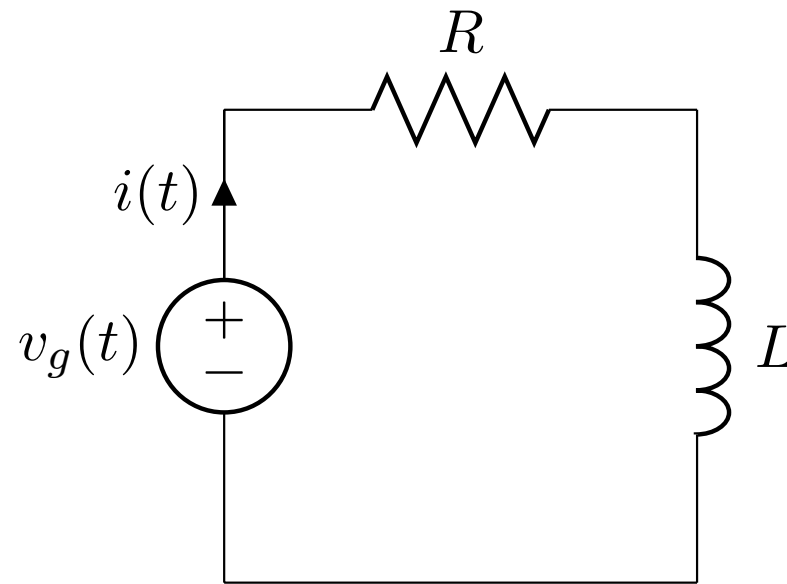
$$v(t_0) = 0 \rightarrow w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

$v(t) = \text{cte} \rightarrow i(t) = 0 \rightarrow$ circuito abierto

$v(t)$ no puede cambiar de manera brusca

Ejercicio 0-1

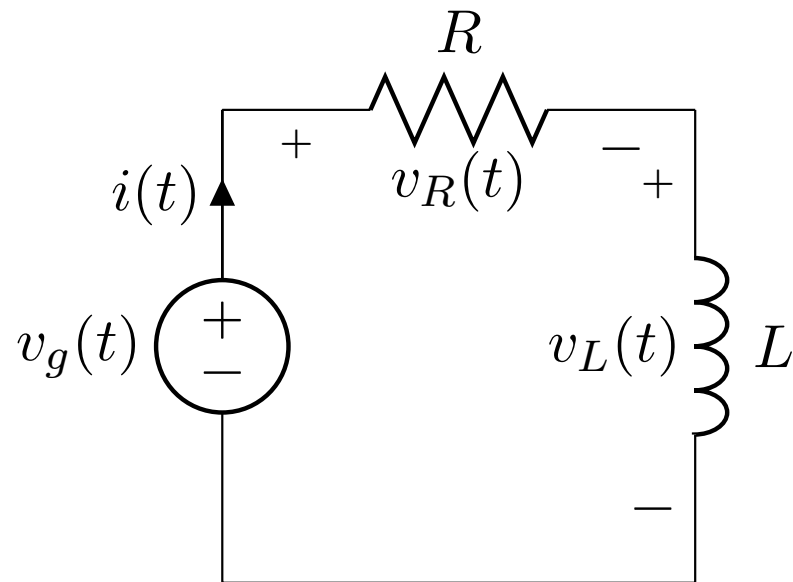
Plantea la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento del siguiente circuito



Datos: $v_g(t)$, R , L

Solución 0-1

- 1) Dibujamos las tensiones de los elementos pasivos (resistencias, bobinas y condensadores). Puedes dibujarlo en cualquier sentido aunque normalmente se pone en el mismo sentido que la intensidad.



- 2) Establecemos las relaciones entre tensiones e intensidades.

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Solución 0-1 (cont)

3) Aplicamos la LKT a la única malla del circuito

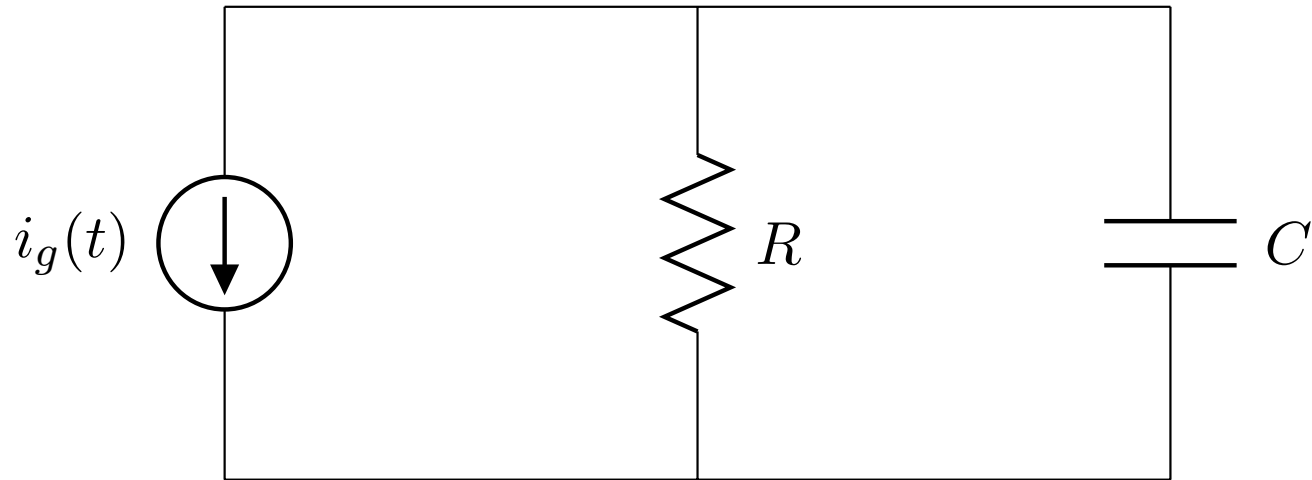
$$v_g(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

4) Reemplazamos las expresiones de las tensiones en función de la intensidad para obtener una única ecuación diferencial en $i(t)$

$$v_g(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Ejercicio 0-2

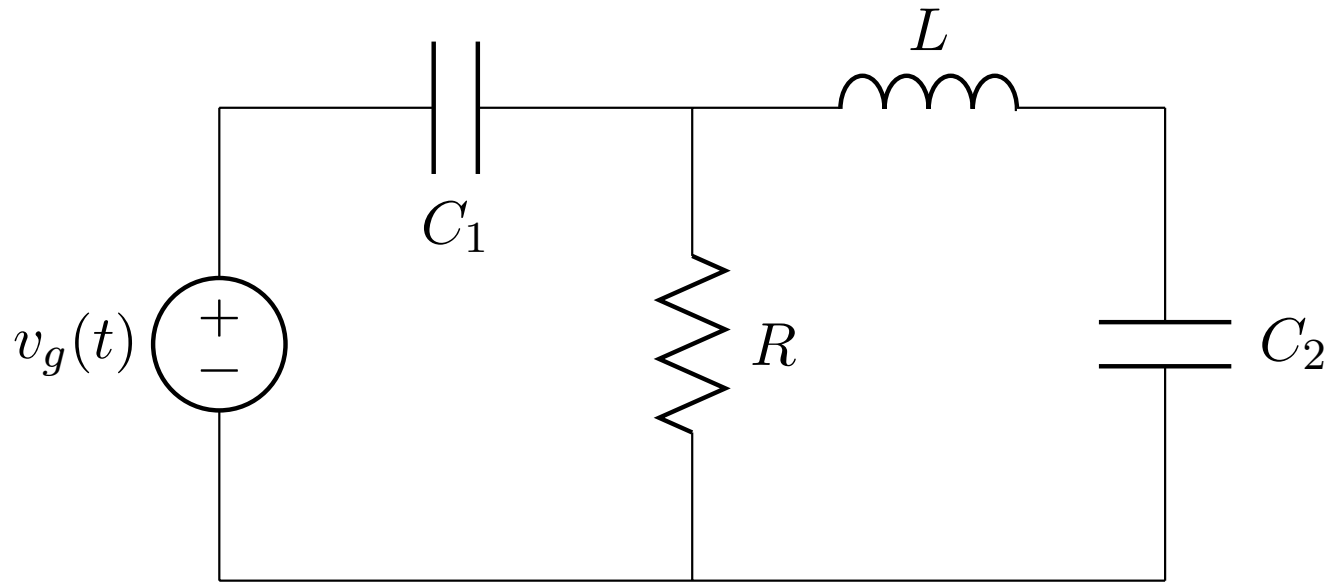
Plantea la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento del siguiente circuito



Datos: $i_g(t)$, R , C

Ejercicio 0-3

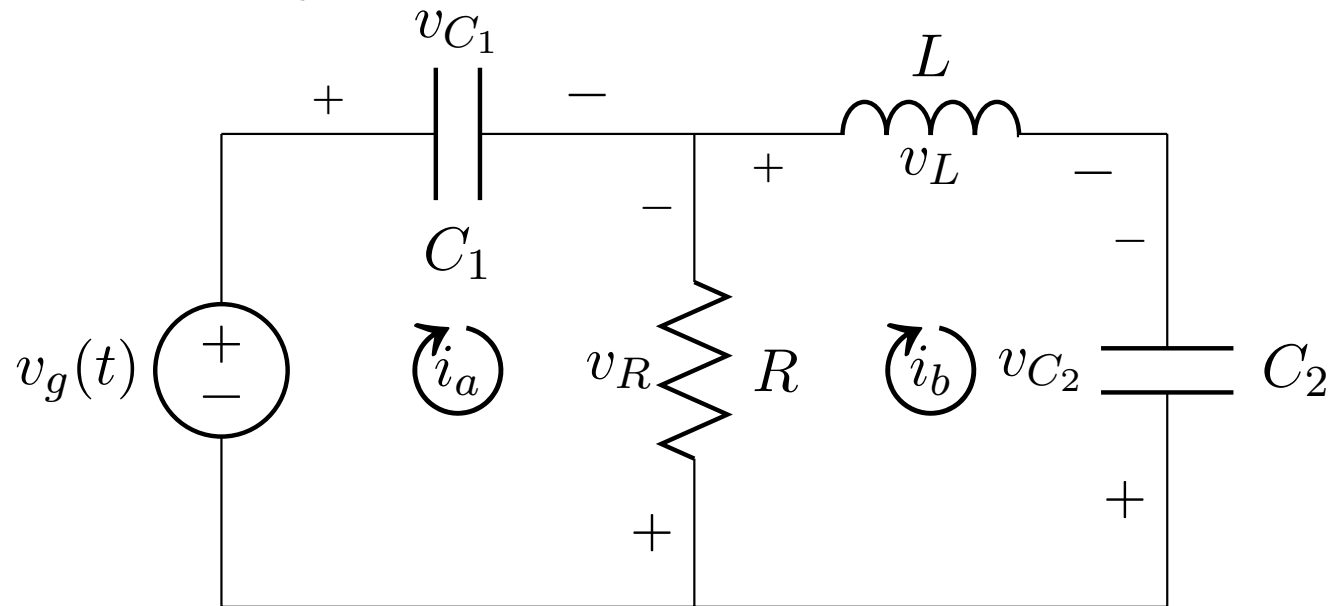
Plantea el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza el comportamiento del siguiente circuito usando el método de mallas



Datos: $v_g(t)$, R , C_1 , L , C_2

Solución 0-3

- 1) Vamos a solucionar con el método de mallas, así que dibujamos las dos corrientes de mallas y las tensiones de los elementos pasivos



- 2) Expresamos las tensiones en función de las intensidades de malla

$$\begin{aligned} v_{C_1} &= v_{C_1}(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_a dt & v_R &= R(i_b - i_a) \\ v_L &= L \frac{di_b}{dt} & v_{C_2} &= v_{C_2}(0) - \frac{1}{C_2} \int_0^t i_b dt \end{aligned}$$

Solución 0-3 (cont)

3) Aplicamos LKT a las dos mallas

$$\text{Malla } a \rightarrow v_g = v_{C_1} - v_R$$

$$\text{Malla } b \rightarrow v_R + v_L - v_{C_2} = 0$$

4) Sustituimos las expresiones de las tensiones

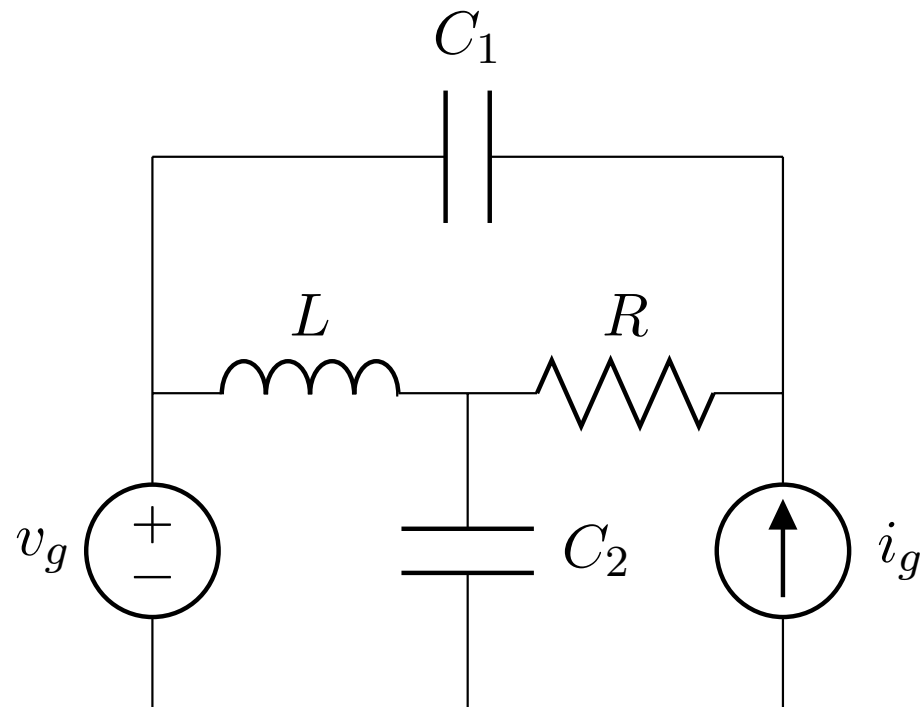
$$v_g = v_{C_1}(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_a dt - R(i_b - i_a)$$

$$R(i_b - i_a) + L \frac{di_b}{dt} - v_{C_2}(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_b dt = 0$$

Obtenemos dos ecuaciones diferenciales (una de primer orden y otra de segundo) y dos incógnitas i_a y i_b

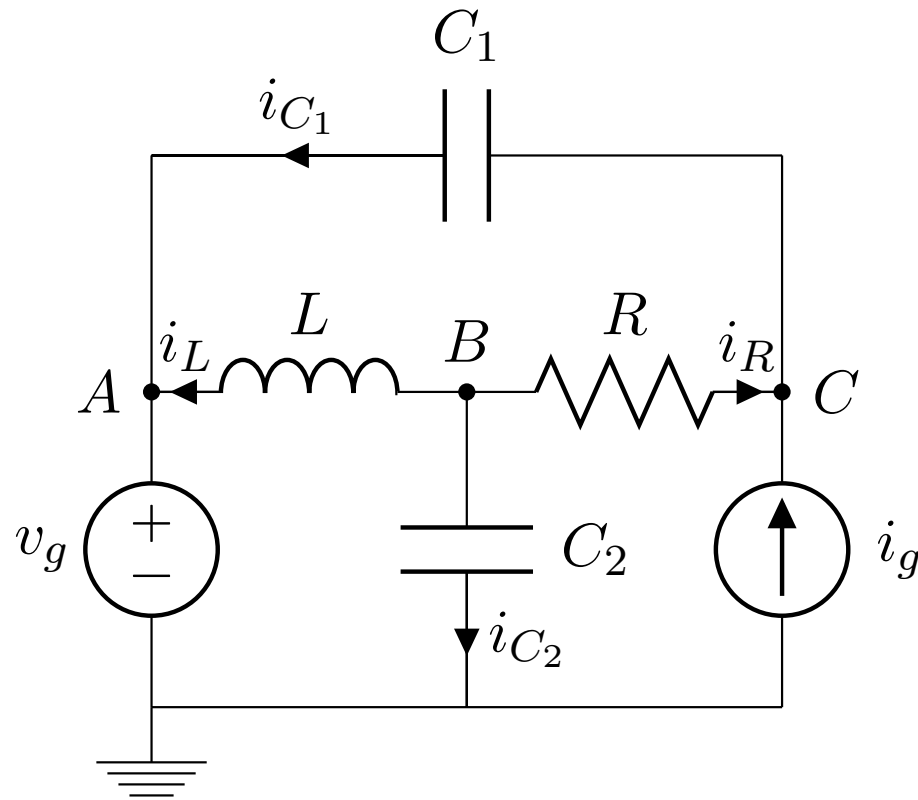
Ejercicio 0-4

Plantea el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza el comportamiento del siguiente circuito usando el método de nudos



Solución 0-4

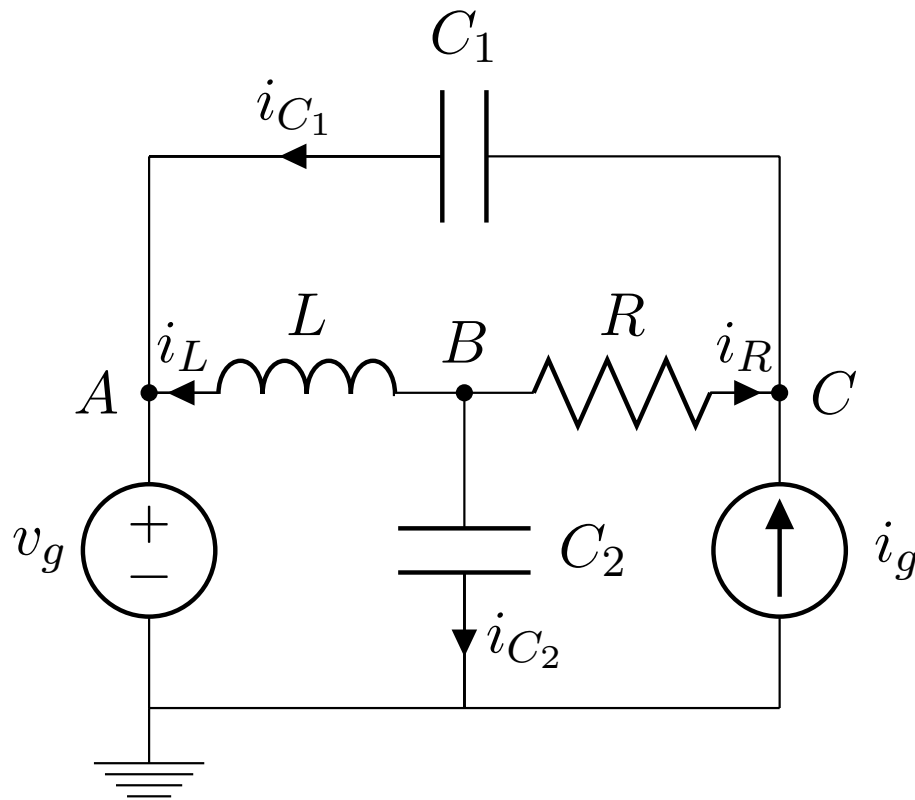
- 1) Identificamos los nudos del circuito (uno como referencia) y las intensidades por las ramas



Nos damos cuenta que la tensión v_A es conocida e igual a v_g , por lo cuál tenemos una incógnita menos.

Solución 0-4 (cont)

- 2) Expresamos las intensidades por las ramas en función de las tensiones en los nudos



$$i_{C_1} = C_1 \frac{d(v_C - v_G)}{dt}$$

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t (v_B - v_g) dt$$

$$i_{C_2} = C_2 \frac{d(v_B)}{dt}$$

$$i_R = \frac{v_B - v_C}{R}$$

Solución 0-4 (cont)

3) Aplicamos LKC a todos los nudos excepto el nudo de referencia

$$\text{Nudo B} \rightarrow i_L + i_R + i_{C_2} = 0$$

$$\text{Nudo C} \rightarrow i_g + i_R = i_{C_1}$$

4) Sustituimos las expresiones de las intensidades

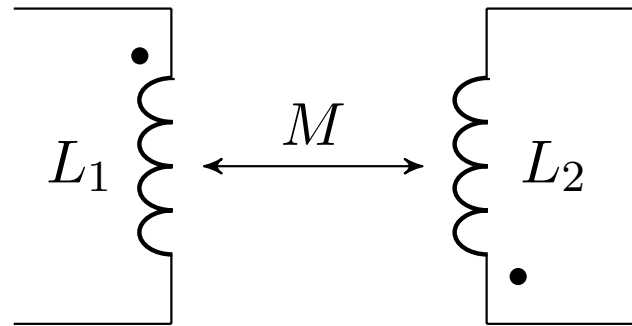
$$\text{Nudo B} \rightarrow i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t (v_B - v_g) dt + \frac{v_B - v_C}{R} + C_2 \frac{d(v_B)}{dt} = 0$$

$$\text{Nudo C} \rightarrow i_g + \frac{v_B - v_C}{R} = C_1 \frac{d(v_C - v_g)}{dt}$$

Obtenemos dos ecuaciones diferenciales (una de primer orden y otra de segundo) y dos incógnitas v_B y v_C

Bobinas acopladas magnéticamente

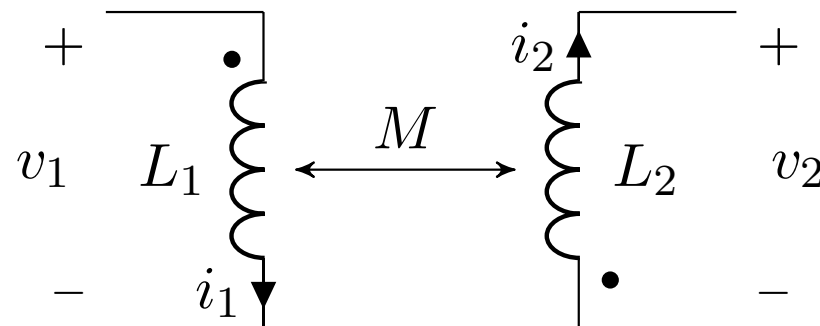
Pasos para determinar la tensión en bobinas acopladas magnéticamente



$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

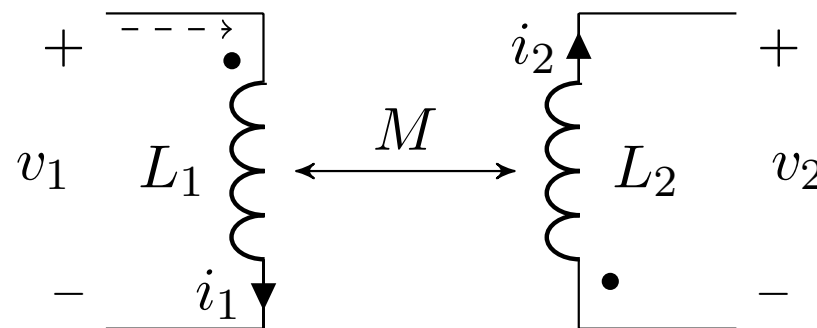
k es el coeficiente de acoplamiento y varía entre 0 y 1

- 1) Elige arbitrariamente el sentido de las intensidades y las tensiones de las bobinas



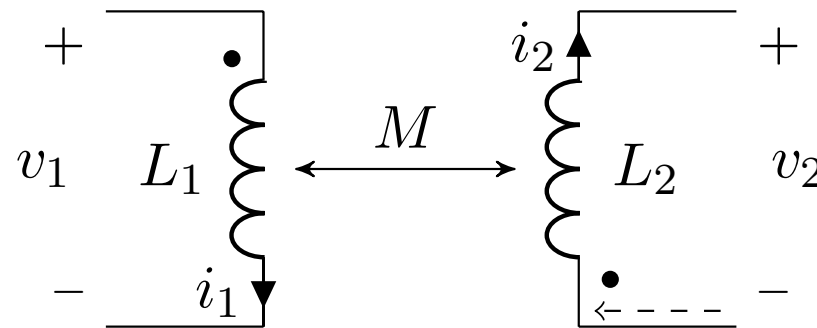
Bobinas acopladas magnéticamente (cont)

- 2) Determina la tensión inducida en L_1 debido a la intensidad i_1 . Como el sentido de i_1 coincide con el sentido de v_1 dicha tensión será $+L_1 \frac{di_1}{dt}$
- 3) Determina la tensión inducida en L_2 debido a la intensidad i_2 . Como el sentido de i_2 es contrario al sentido de v_2 dicha tensión será $-L_2 \frac{di_2}{dt}$
- 4) Ten en cuenta que para los dos términos anterior no hemos necesitado mirar los puntos que indican los terminales correspondientes
- 5) Determina la tensión inducida en L_1 debido a la intensidad i_2 . Primero vemos que la intensidad i_2 está entrando por el terminal correspondiente, así que nos imaginamos una corriente ficticia (en discontinuo) entrando por el terminal correspondiente de la bobina L_1 . Como dicha corriente ficticia coincide con el sentido de v_1 , la tensión inducida por i_2 es $+M \frac{di_2}{dt}$



Bobinas acopladas magnéticamente (cont)

- 6) Determina la tensión inducida en L_2 debido a la intensidad i_1 . Primero vemos que la intensidad i_1 está entrando por el terminal correspondiente, así que nos imaginamos una corriente ficticia (en discontinuo) entrando por el terminal correspondiente de la bobina L_2 . Como dicha corriente ficticia tiene sentido contrario al de v_2 , la tensión inducida por i_1 es $-M \frac{di_1}{dt}$

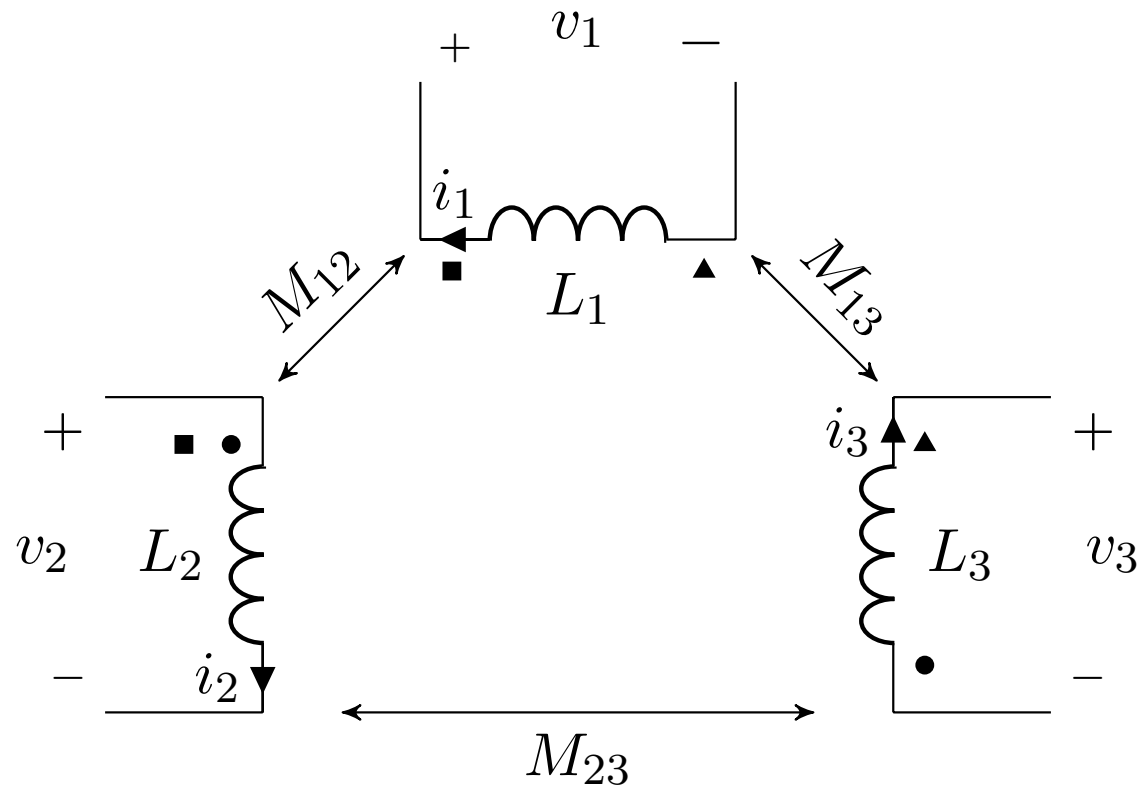


- 7) Suma todas las tensiones inducidas en cada bobina para obtener

$$v_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

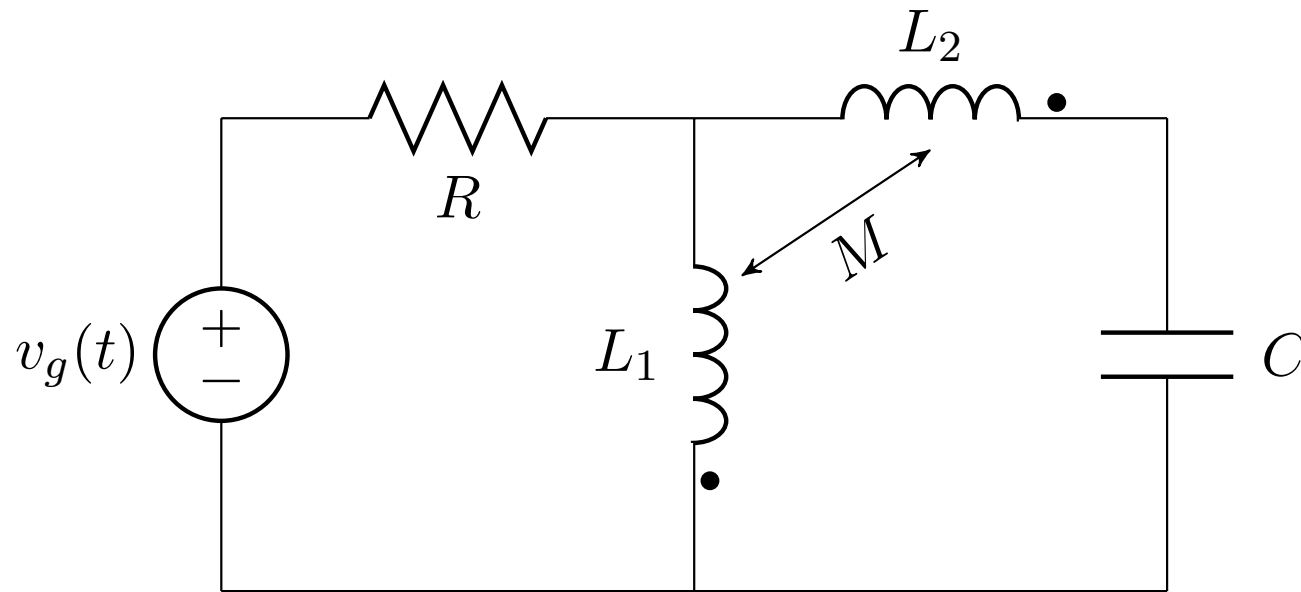
Ejercicio 0-5

Determina las expresiones de las tensiones v_1 , v_2 y v_3



Ejercicio 0-6

Plantea el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza el comportamiento del siguiente circuito usando el método de mallas



Datos: $v_g(t)$, R , L_1 , L_2 , M , C